ÉNIGMES MATHÉMATIQUES CORRIGÉES

du **lycée** à **Normale Sup'**

Préface de **Cédric Villani**

Guillaume **Deslandes**
Clément **Deslandes**

Illustrations de **Laure Macé de Lépinay**

ellipses

Énigmes mathématiques corrigées

Énigmes mathématiques corrigées du lycée à Normale Sup'

Guillaume Deslandes
Ancien élève de l'ENS Cachan
Agrégé de mathématiques

Clément Deslandes
Étudiant à l'ENS Lyon

Illustrations : **Laure Macé de Lépinay**

ellipses

ISBN 9782340-002128
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2014
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Préface

Les énigmes nourrissent notre histoire, notre littérature, notre mythologie. D'Œdipe à Turing en passant par Sherlock Holmes, on continue de célébrer ceux qui ont accompli leur destin en résolvant des énigmes. Réels ou imaginaires, ces héros incarnent sans doute la condition de l'humanité, s'acharnant à décrypter la gigantesque énigme du monde !

Dans cette quête philosophique, les scientifiques se sont entendus pour faire la route ensemble, avec système et précision, partage complet des informations, scepticisme a priori et contrôle a posteriori. Leur démarche a rencontré un succès considérable, mais n'a pas épuisé le mystère, loin de là – tant il est vrai que chaque succès remporté sur l'inconnu génère son nouveau lot de questions. Ainsi l'histoire de la science pourrait être réécrite comme une suite sans fin d'énigmes parfois résolues...

Mais au-delà de leur solution, les énigmes constituent aussi en elles-mêmes un formidable apprentissage. L'étudiant qui soutient sa thèse, tout fier d'avoir résolu une énigme posée par son directeur de thèse (ou une énigme qu'il s'est posée à lui-même !) ne me contredira certainement pas.

Nul besoin, au reste, d'attendre la thèse pour profiter du pouvoir des énigmes : comme nombre de lecteurs sans doute, je garde le souvenir vivace de la douce torture mentale que j'ai pu m'imposer, enfant, afin de résoudre un problème posé par un enseignant ou une revue de sciences pour la jeunesse. L'un d'entre eux, un exercice de géométrie que j'avais finalement résolu par un raisonnement astucieux et complexe, me valut quelque dépit quand mon professeur me montra une solution bien plus simple et élégante. Un autre, portant sur la convergence des séries, me tracassa pendant des mois jusqu'à ce que la solution m'apparaisse dans mon lit, comme par illumination, une veille de rentrée des classes... Autant d'expériences qui sont venues enrichir ma formation au moins autant que les cours.

Une énigme ce n'est jamais qu'un exercice ; mais c'est un exercice posé avec une certaine dose de décorum et de mystère, dont la solution

demande une certaine dose d'imagination, et qui marque l'esprit. Et une énigme, c'est aussi tout simplement l'occasion de se triturer les méninges, pendant une minute, une heure ou une semaine.

Quelle irritation, quelle frustration quand on est occupé à chercher la solution, le regard dans le vide et l'air stupide, l'esprit occupé par toutes ces pensées contradictoires qui courent à 100 à l'heure ou au contraire tournent en rond. Il s'en passe de belles, alors, dans le cerveau ! "Ça me dit quelque chose..." "Ah c'est bien sûr..." "J'y ai déjà réfléchi pendant une heure" "Vraiment je ne vois pas" "Et si..." "Non, c'est pas possible !" "Je suis sûr qu'il y a une faute dans l'énoncé !" "Enfin, c'est inconcevable, comment se..." "Ah c'est incroyable comme je suis crétin !" "Mais ce type a l'esprit tordu !" "Pourquoi, bon sang, est-ce que je perds mon temps sur cette histoire ?" "Je suis SÛR qu'il y a une faute dans l'énoncé ! !"

Pourquoi on perd ainsi son temps ? Parce que l'on se sent si fier quand on a résolu l'énigme sans jeter un coup d'œil à la solution ; mais aussi parce que l'on se sent si bien, malgré la frustration, quand on est en train de chercher !

Des recueils d'énigmes, on en trouve tant et plus. Mais celui des frères Deslandes (Mycroft et Sherlock ?) est remarquable à plus d'un égard.

D'abord par sa présentation impeccable : des énigmes triées en fonction des concepts mis en jeu ; des situations cocasses ; des dessins désuets et décalés ; des indications pour vous mettre sur la voie ; et finalement des solutions complètes.

Mais aussi remarquable par sa variété : des énigmes célèbres et d'autres obscures, des situations loufoques ou naturelles, des problèmes posés par de grands mathématiciens et d'autres émanant du simple bon sens, des questions très anciennes et d'autres tirées d'articles de recherche récents, des problèmes plutôt simples et d'autres qui feront sécher même les mathématiciens professionnels.

Et par-dessus tout, remarquable parce que dans cet ouvrage les énigmes amènent à faire de la bonne mathématique, de celle qui n'est pas là simplement pour épater la galerie ou piéger le lecteur, mais qui sert aussi à asseoir un socle théorique et à développer de nouvelles techniques et technologies. Au fur et à mesure des solutions, on verra se mettre en place des concepts de plus en plus avancés, touchant à tous

les domaines mathématiques : logique, combinatoire, analyse, algèbre, probabilité, géométrie...

On pourra se plaindre qu'en plaçant la théorie en fin d'ouvrage, on va à rebours de la conception classique d'un cours de mathématique, de la théorie aux applications... Peut-être, mais on peut répondre que ce n'est qu'un retour à l'ordre naturel des choses, puisque les concepts mathématiques ont été développés avant tout pour résoudre des problèmes ; pour illuminer et rendre limpide ce qui semblait sorti d'un grand chapeau ; et pour mettre au point les techniques qui permettront à l'esprit humain, décidément jamais en panne d'inventivité, de résoudre toutes sortes de problèmes auxquels on n'a pas encore pensé.

Cédric Villani

Avant-propos

Ce livre est un recueil d'énigmes mathématiques difficiles. Les énoncés sont précis et les solutions logiques, sans "astuces". Seuls les éléments explicitement définis par l'énoncé peuvent être utilisés pour la résolution. Par exemple, pour l'énigme des prisonniers et l'ampoule du couloir, il n'est pas question d'utiliser le fait qu'une ampoule éteinte depuis peu est encore chaude, car il n'est pas mentionné dans l'énoncé que l'ampoule chauffe. Tout se passe dans un monde mathématique idéal et les différents protagonistes (prisonniers, pirates, serpents...) sont tous de parfaits logiciens.

Les énigmes sont classées par niveau de réflexion et non par degré de connaissances mathématiques. Ainsi, un excellent lycéen peut être bloqué sur une énigme de niveau 1 si elle nécessite un bagage mathématique qu'il n'a pas. Les rappels mathématiques à la fin de l'ouvrage ont pour but de pallier cet inconvénient et permettent d'acquérir les connaissances nécessaires pour résoudre l'ensemble des énigmes, à quelques exceptions près (par exemple, l'énigme de la fourmi contre la voiture nécessite la maîtrise des équations différentielles, sujet trop vaste pour être abordé ici).

Même bien armé, il est recommandé de prendre le temps de les chercher. Le petit coup d'œil à la solution risque de fermer définitivement la possibilité d'avoir le plaisir de trouver plus tard. En revanche, après quelques jours de recherches infructueuses, il est possible de se reporter à la partie indications, spécialement conçue pour mettre sur la voie sans tout révéler.

Un grand merci à Damien Thillou et Nolwenn Bellégo pour leurs relectures attentives, à Cédric Villani pour sa préface, et à Thibaut Deslandes, Paul Le Corguillé, Jacques Bonassi, Rémi Nollet et Laurent Domingos. Merci également à Corinne Baud des éditions Ellipses pour avoir accueilli ce travail.

N'hésitez pas à envoyer vos remarques par courriel à `enigmes@gmx.com`. Les auteurs vous souhaitent autant de plaisir qu'ils en ont eu eux-mêmes à réaliser cet ouvrage.

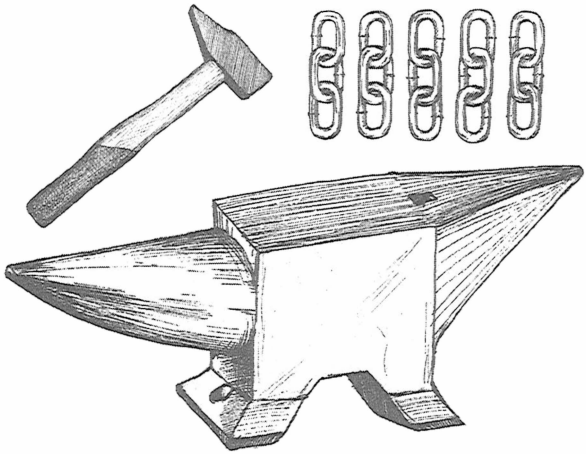
Première partie

Énoncés

Niveau 1

1 Le forgeron feignant

Un forgeron souhaite former une chaîne de quinze maillons à l'aide de ces cinq chaînes de trois maillons :



Pour cela, il peut ouvrir des maillons et les refermer.

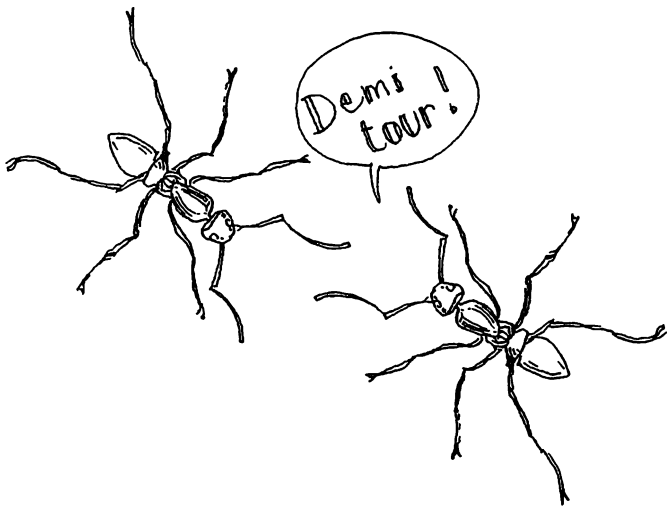
Comment peut-il réaliser cette chaîne en ouvrant un nombre minimum de maillons ?

2 Les fourmis tamponneuses

Cinquante fourmis sont lâchées simultanément sur un bâton. Chaque fourmi atterrit sur une partie quelconque du bâton et part dans une direction quelconque. Lorsque deux fourmis se rejoignent, elles se touchent et repartent instantanément dans des directions opposées. Quand une fourmi arrive au bord du bâton, elle tombe. Le bâton fait un mètre de long et les fourmis avancent à la vitesse de 1 m/min.

Au bout de combien de temps au maximum toutes les fourmis seront-elles tombées du bâton ?

Par exemple, s'il n'y a qu'une fourmi lâchée sur le bâton au lieu de cinquante, elle mettra au maximum une minute pour en tomber. En effet, le cas le plus défavorable se produit lorsqu'elle atterrit sur l'extrémité gauche du bâton et part du côté droit ou lorsqu'elle atterrit sur l'extrémité droite du bâton et part du côté gauche.



3 Le prix du gâteau

Trois amis préparent une fête. Le premier fait cinq gâteaux, le second en fait trois et le troisième ne sait pas cuisiner. Il propose néanmoins de participer à hauteur de huit euros.

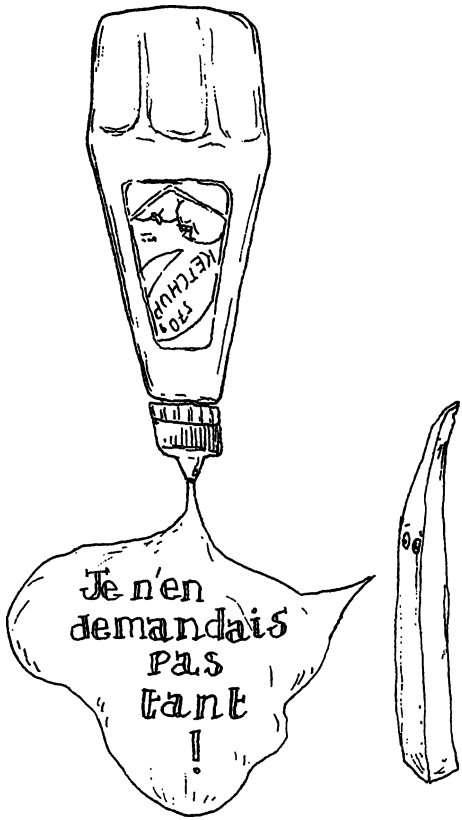
Comment doit-il répartir ses huit euros entre ses deux amis pour que tout le monde ait contribué autant ?

Il peut par exemple donner cinq euros à celui qui a fait cinq gâteaux et trois euros à celui qui en a fait trois, mais est-ce équitable ?

4 La frite au ketchup

Jacques termine ses frites. Arrivé à la dernière frite, il décide de rajouter un peu de ketchup. Maladroit, il renverse tout le pot sur la malheureuse frite. Jacques constate alors que la masse de ketchup dans l'assiette représente 99% de la masse totale frite plus ketchup qui est de 1 kg. Après mûre réflexion et en considérant son amour pour le ketchup, il décide d'enlever juste assez de ketchup pour avoir exactement 98% de ketchup dans son assiette.

Quelle masse de ketchup doit-il retirer ?



5 L'explorateur qui tourne en rond

Un explorateur marche 1000 km vers le Sud, puis 1000 km vers l'ouest, puis 1000 km vers le nord. Il constate alors qu'il est retourné à son point de départ !

Quels sont les points de départ possibles ?

Le pôle Nord est un point de départ possible, mais ce n'est pas le seul.

6 L'œuf à la coque

Un aventurier affamé au milieu de la jungle veut se faire cuire un œuf à la coque. Il a tout ce qu'il faut pour cela, excepté l'indispensable chronomètre. Heureusement, il a ramassé deux lianes dont il sait par expérience qu'elles mettent exactement quatre minutes à brûler.

Comment peut-il chronométrer trois minutes avec ces deux lianes ?

Les lianes mettent exactement quatre minutes à brûler entièrement mais ne brûlent pas forcément de façon régulière. Par exemple, une moitié de liane peut se consumer en une minute.

7 Les pilules

Yves s'est fait prescrire un traitement particulier par son homéopathe préféré. Il doit prendre exactement une pilule A et une pilule B tous les jours pendant trente jours. Un jour, il met une pilule A dans sa main et maladroitement deux pilules B dans la même main. Les pilules sont indiscernables, il ne sait donc pas ni quelle est la pilule A ni quelles sont les pilules B. Il ne disposait au départ tout juste que de trente pilules A et trente pilules B, il ne peut donc pas se permettre de jeter les trois pilules.

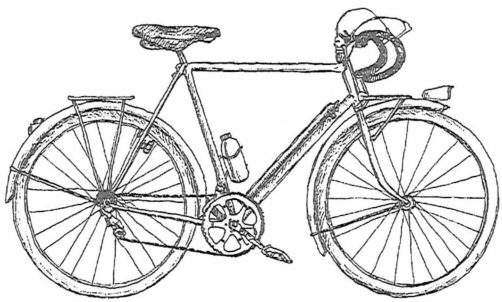
Comment Yves peut-il faire pour suivre son traitement sans perdre de pilule ?

Il est possible de diviser les pilules en plusieurs morceaux.

8 L'étudiant pressé

Un étudiant se rend tous les jours à la fac en vélo. Il fait le trajet à 20 km/h de moyenne.

À quelle vitesse doit-il aller au retour pour que sa vitesse moyenne sur l'aller-retour soit de 40 km/h ?

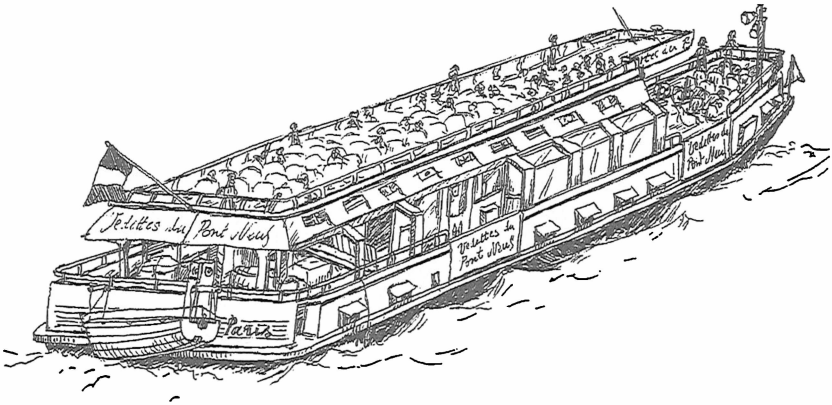


9 À contre-courant

Un bateau-mouche fait tous les jours le même parcours : il descend une partie de la Seine, fait demi-tour, et remonte à contre-courant jusqu'à son point de départ. Un jour, la vitesse du courant est plus élevée que d'habitude.

Le bateau va-t-il mettre moins, autant ou plus de temps que d'habitude pour faire l'aller-retour ?

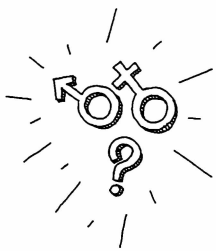
Le bateau va mettre moins de temps à l'aller mais plus de temps au retour.



10 Vive les garçons

Un pays décrète qu'une famille ne peut avoir un deuxième enfant que si le premier est une fille et dans tous les cas ne peut pas avoir plus de deux enfants.

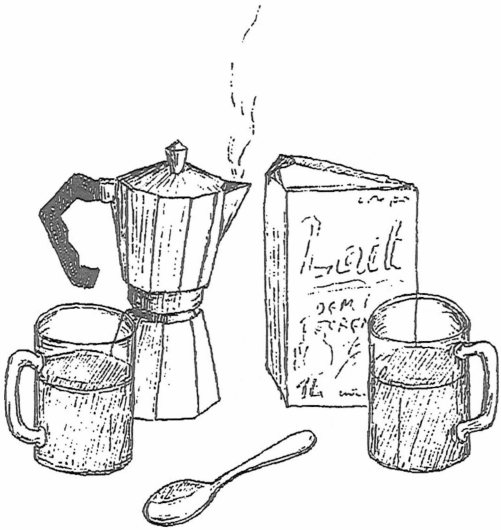
Cela va-t-il modifier la proportion de garçons et de filles ?



11 Café au lait

Damien a devant lui une tasse de café et une tasse de lait. Les deux tasses contiennent la même quantité de liquide : 200 mL. Il commence par mettre une cuillère de café dans le lait puis met une cuillère du mélange lait-café dans le café. La cuillère a une contenance de 5 mL.

À la fin de l'opération, y a-t-il plus de lait dans le café ou de café dans le lait ?



12 Lait au café

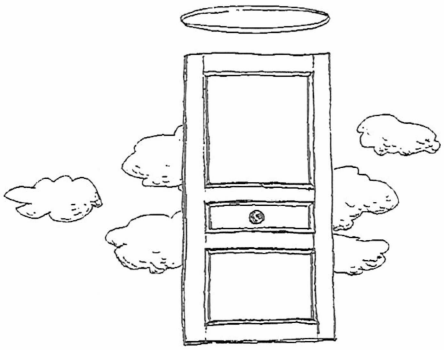
Damien a devant lui une tasse de café et une tasse de lait. Les deux tasses contiennent la même quantité de liquide : 200 mL. Il commence par mettre une cuillère de café dans le lait puis met une cuillère du mélange lait-café dans le café. La cuillère a une contenance de 5 mL.

Peut-il, en répétant autant de fois que nécessaire cette même opération, obtenir une tasse contenant autant de café que de lait ?

13 Les gardes du paradis et de l'enfer

Imaginons deux portes indiscernables, derrière l'une, le paradis, derrière l'autre, l'enfer. Chaque porte est surveillée par un garde. Un des gardes dit toujours la vérité tandis que l'autre garde ment systématiquement, mais on ne peut pas savoir auquel des deux gardes on a affaire.

Comment déterminer, en ne posant qu'une seule question à l'un des deux gardes, quelle est la porte du paradis ?

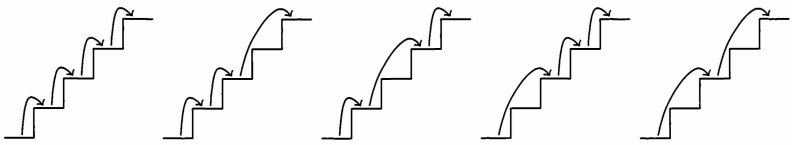


14 Toto monte un escalier

Toto monte un escalier de dix marches. Il peut monter marche par marche ou sauter une marche dès qu'il le souhaite et ce autant de fois qu'il le souhaite.

Combien Toto a-t-il de façons différentes de monter cet escalier ?

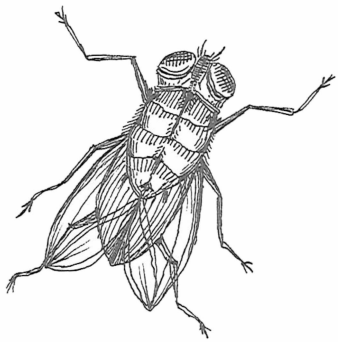
Par exemple il y a cinq façons différentes de monter un escalier de quatre marches :



15 La mouche virevoltante

Deux trains au départ distants de 400 km foncent l'un vers l'autre, chacun allant à la vitesse de 200 km/h. Une mouche part du premier train et vole à la vitesse incroyable de 400 km/h jusqu'au deuxième train. Lorsqu'elle l'atteint, elle fait instantanément demi-tour et repart vers le premier train et ainsi de suite, continuant ses aller-retours jusqu'à ce que les deux trains se rejoignent.

Quelle distance la mouche parcourt-elle au total ?



16 Une heure d'avance

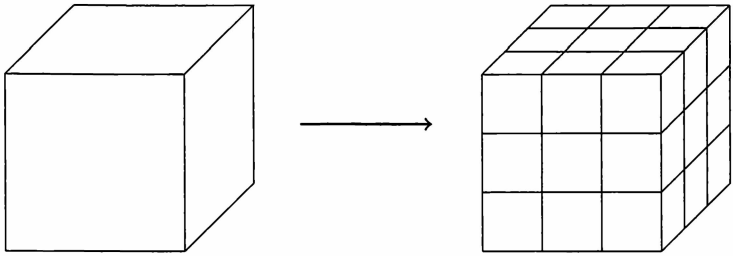
Un petit garçon sort tous les jours de l'école à 16 h et sa maman vient le chercher tous les jours à 16 h. Un jour, le petit garçon sort exceptionnellement à 15 h de l'école. N'ayant pas prévenu sa maman et sachant qu'elle va arriver à 16 h, il préfère marcher à sa rencontre au lieu de l'attendre. Il marche sur la route habituelle vers sa maison jusqu'à ce qu'il croise la voiture de sa maman. Elle le fait monter, fait demi-tour et rentre à la maison. Ils arrivent dix minutes plus tôt que d'habitude.

Combien de temps le petit garçon a-t-il marché ?

On considérera que sa maman n'a pas perdu de temps en le faisant monter et que la voiture roule à vitesse constante.

17 Comment découper un cube

On souhaite découper un cube en 27 petits cubes comme sur le schéma ci-dessous :



On dispose pour cela d'une scie, qui naturellement coupe suivant des plans : il n'y a pas de coupes tordues. On peut arriver à découper le grand cube en six coupes en maintenant les pièces découpées à leur place, c'est-à-dire en ne les séparant que lorsque le découpage est entièrement fini.

Peut-on arriver à découper le grand cube en moins de six coupes en redisposant les pièces comme on veut à chaque coupe ?

18 Le premier à cent

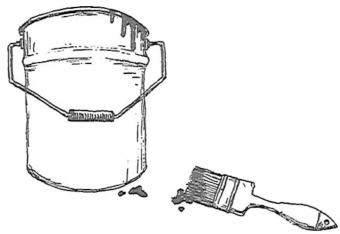
Deux amis jouent au petit jeu suivant. Partant de zéro, chacun ajoute à la somme précédente un nombre entier compris entre un et dix à tour de rôle. Le gagnant est le premier qui arrive à cent.

Quelle stratégie celui qui commence peut-il mettre en place pour gagner à tous les coups ?

19 Attention peinture fraîche

Trois peintres doivent repeindre un salon. Le premier mettrait deux heures s'il était seul pour tout repeindre, le second en mettrait trois et le troisième cinq.

Combien de temps mettent-ils à trois ?



20 Le cocktail mondain

Au cours d'un cocktail, les convives se serrent la main au gré des rencontres. Chaque convive ne serre jamais la main plus d'une fois à la même personne.

Montrer qu'à tout instant il existe au moins deux personnes qui ont serré le même nombre de mains.

21 Même heure, même endroit

Un jeune cadre part de chez lui à huit heures du matin pour aller travailler. Après une longue journée de travail, il quitte son lieu de travail à huit heures du soir et rentre chez lui par le même chemin qu'à l'aller.

Montrer que sur le chemin du retour, il y aura au moins un moment où sa montre indiquera la même heure qu'au même endroit le matin, c'est-à-dire qu'il sera exactement au même endroit que 12 h plus tôt.

22 La pièce de trop

Un étudiant passe un entretien d'embauche. On lui propose le jeu suivant pour tester sa sagacité. Il est placé devant une table carrée en face de son futur employeur. À côté se trouve un bac de pièces, toutes rondes et identiques. Chacun place à tour de rôle une pièce sur la table qui ne doit pas toucher les autres pièces déjà posées. Le perdant est celui qui n'a plus de place pour poser sa pièce. L'étudiant commence.

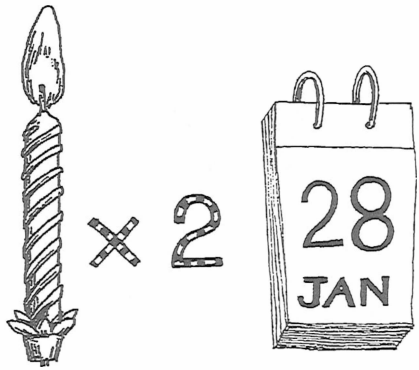
Quelle stratégie peut-il adopter pour gagner à tous les coups ?

23 Le paradoxe des anniversaires

Une classe comporte vingt-trois élèves.

Quelle est la probabilité que deux élèves aient leur anniversaire le même jour de l'année ?

On considérera pour simplifier que toutes les années ont 365 *jours. On supposera de plus que chaque élève a une probabilité* $\frac{1}{365}$ *d'être né un jour donné. Ce problème n'a rien d'un paradoxe, mais il est souvent appelé ainsi parce que le résultat contredit fortement l'intuition. Cela vaut la peine de faire le calcul !*

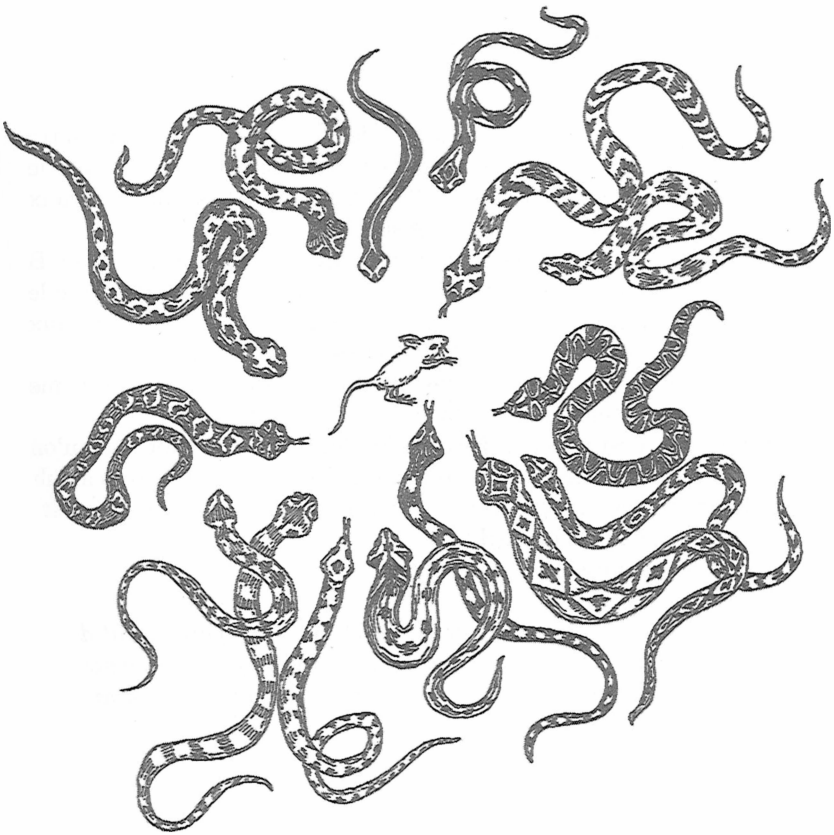


24 Les quinze serpents

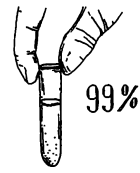
Quinze serpents encerclent une souris. Tous les serpents veulent manger la souris, mais chaque serpent sait que s'il mange la souris, il va s'endormir et il pourra à son tour se faire manger par un autre serpent.

Que se passe-t-il ?

Bien sûr, les serpents sont affamés, mais ils préfèrent encore s'abstenir si c'est pour se faire manger dans la foulée. On supposera qu'il existe toujours un serpent plus rapide que les autres.



25 Un test de dépistage



Une maladie frappe 0.1% de la population. Un laboratoire pharmaceutique propose un test de dépistage fiable à 99%, c'est-à-dire ayant 99% de chance d'indiquer "négatif" si l'individu dépisté est sain et 99% de chance d'indiquer "positif" si l'individu est malade. Le test est toujours soit positif, soit négatif.

Quelle est la probabilité qu'un individu dépisté positif soit effectivement malade ?

26 Une curieuse étude

Une étude médicale a été menée pour tester la performance de deux traitements A et B contre les calculs rénaux [1]. L'étude se divise en deux parties.

Dans la première, on teste l'efficacité des traitements A et B contre les petits calculs rénaux. Sur N_1^A petits calculs rénaux traités avec le traitement A, le taux de succès est de 93%. Sur N_1^B petits calculs rénaux traités avec le traitement B, le taux de succès est de 87%.

Dans la seconde partie, on teste l'efficacité des traitements A et B contre les gros calculs rénaux. Sur N_2^A gros calculs rénaux traités avec le traitement A, le taux de succès est de 73%. Sur N_2^B gros calculs rénaux traités avec le traitement B, le taux de succès est de 69%.

Le nombre total de tests effectués avec le traitement A est le même que celui avec le traitement B : on a $N_1^A + N_2^A = N_1^B + N_2^B$.

Le traitement A est plus efficace dans les deux cas. Pourtant, lorsqu'on regarde le taux de réussite total (en réunissant les petits et les gros calculs rénaux) du traitement A, on trouve 78%, alors que le taux de réussite total du traitement B est de 83% !

Comment est-ce possible ?

Inutile de chercher les valeurs de $N_1^A, N_2^A, N_1^B, N_2^B$ permettant de retrouver ces résultats. L'enjeu est simplement d'expliquer ce phénomène et de trouver un exemple simple où il s'exprime de manière flagrante.

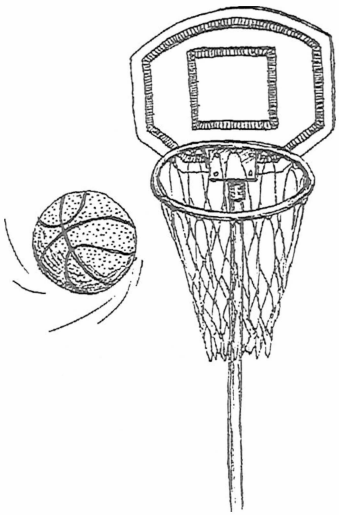
1. C. R. Charig, "Comparison of treatment of renal calculi by open surgery, percutaneous nephrolithotomy, and extracorporeal shockwave lithotripsy", British Medical Journal, Clinical Research Ed., Mars 1986, 292(6524) : 879-88

Niveau 2

27 Les lancers francs

Un basketteur s'entraîne aux lancers francs. Il rate son premier lancer mais termine la journée avec une moyenne de 80% de réussite.

Montrer qu'il a eu à un moment une moyenne d'exactement 75% de réussite.



28 Le numéro de la rue d'en face

Le facteur apporte le courrier chez l'institutrice. Celle-ci lui propose une devinette :

"J'ai trois enfants. Le produit de leurs âges est 36 et la somme de leurs âges est le numéro de la rue d'en face. Quels âges ont-ils ?

– Je ne peux pas le savoir, répond le facteur qui connaît pourtant le numéro de la rue d'en face.

– L'ainée joue du piano.

– Dans ce cas je connais leurs âges respectifs".

Quels sont les âges des enfants de l'institutrice ?

29 Le tableau instable

Comment accrocher un tableau avec deux clous de telle sorte que, quel que soit le clou que l'on retire, le tableau tombe ?

Par exemple, sur la figure ci-dessous, le tableau tient encore si l'on retire un clou : ce n'est pas satisfaisant.

30 Les femmes infidèles

Dans un village imaginaire où vivent un certain nombre de couples, certaines femmes trompent leur mari ! Malheureusement pour elles, les ragots tournent très vite et quand une femme trompe son mari tout le monde le sait sauf le mari évidemment. Mais si le mari l'apprend, le couple se sépare le soir même et tous les villageois s'en aperçoivent le lendemain matin. Il y avait exactement cinquante femmes infidèles dans ce village et tout le monde vivait en parfaite harmonie jusqu'à ce qu'un matin une personne écrive sur un mur de la ville : "Il existe au moins une femme infidèle dans ce village".

Que se passe-t-il alors ?

31 Des probabilités étonnantes

Un couple a deux enfants. On lui demande s'il a au moins une fille et il répond "oui". Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

On lui demande ensuite s'il a une fille qui s'appelle Sophie. S'il répond "oui", quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

Au lieu de lui poser cette deuxième question, on lui demande juste de nous donner un prénom féminin de l'un de ses enfants. S'il répond Sophie, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

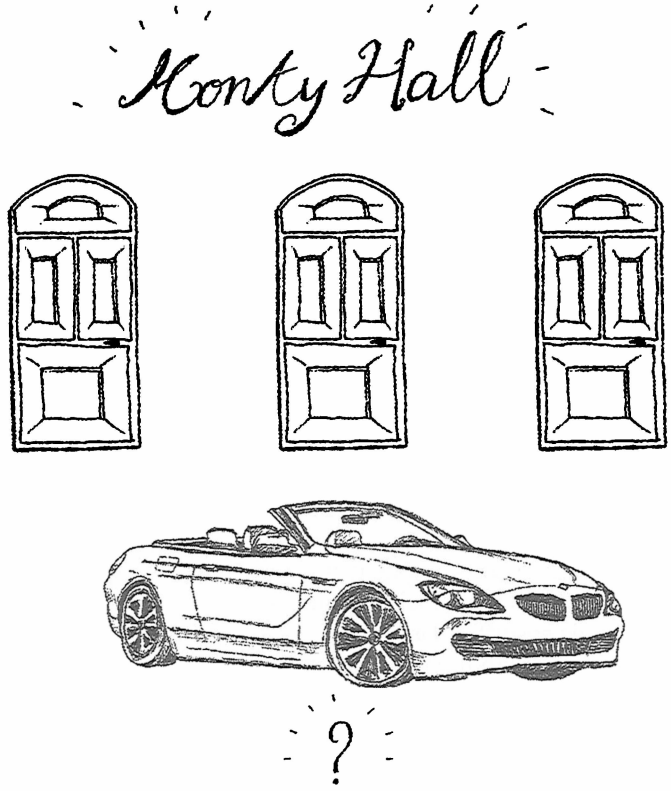
Comme on peut s'en douter vu le titre de l'énigme, les deux dernières probabilités sont différentes ! On supposera pour simplifier que tous les prénoms ont la même probabilité ϵ d'être donnés à la naissance.

32 Le paradoxe de Monty Hall[2]

Lors d'un jeu télévisé, le finaliste doit choisir entre trois portes qui se trouvent devant lui, sachant que derrière l'une d'elles se trouve une voiture de rêve, mais derrière les deux autres des lots de compensation. Le candidat fait son choix, puis le présentateur se lance dans sa routine habituelle bien connue de tous : il ouvre une des deux portes restantes, en évitant celle cachant la voiture pour ne pas gâcher le suspens. Le candidat a alors le choix entre changer de porte ou valider son choix.

Que doit-il faire ?

Le présentateur ne sait pas où se trouve la voiture et ouvre une des deux portes au hasard. Même question.



2. Monty Hall fut le présentateur de l'émission *Let's Make a Deal* dont est inspiré ce problème.

33 Les puzzles carrés

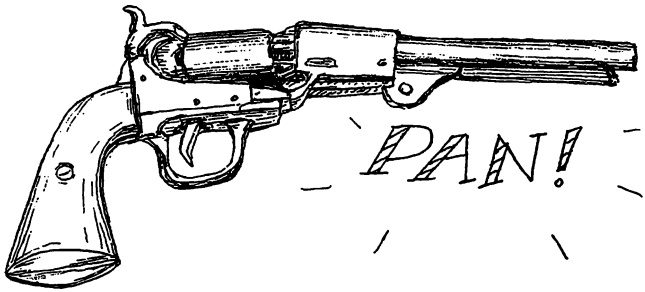
Un fabricant de puzzles réalise des puzzles carrés avec des pièces carrées. Les pièces peuvent être de tailles différentes mais elles sont toutes carrées et une fois assemblées le résultat est un carré. Sur chaque boîte il inscrit le nombre de pièces. Quels sont les nombres qu'il ne pourra jamais inscrire ?

Par exemple, il ne pourra jamais inscrire le nombre 2 *sur ses boîtes, car il est impossible de former un carré avec deux carrés plus petits.*

34 Le bon, la brute et le truand

Le bon, la brute et le truand s'affrontent dans un truel. Ils décident que le bon commencera à tirer, puis la brute, ensuite le truand, de nouveau le bon, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'un (lorsque quelqu'un est mort, on passe au suivant). Le bon a une chance sur trois de tuer son adversaire, la brute vise mieux et a une chance sur deux de tuer son adversaire, le truand ne rate jamais son coup. Chacun connaît les probabilités de réussite au tir des trois protagonistes et ne cherche qu'à gagner le truel. Chacun peut choisir sa cible comme il veut, et même tirer en l'air, c'est-à-dire faire exprès de manquer son coup s'il le souhaite.

C'est au bon de commencer, que doit-il faire ?

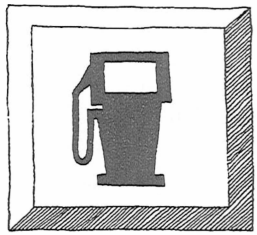


35 La pénurie d'essence

Sur le périphérique d'une grande ville se trouvent plusieurs stations-service. Suite à une pénurie, le volume total d'essence de l'ensemble des stations est seulement égal au volume d'essence consommé par une seule voiture pour faire le tour du périphérique.

Montrer qu'il existe au moins une station-service de laquelle une voiture sans essence peut partir et réussir à faire le tour du périphérique sans tomber en panne d'essence.

Supposons par exemple que faire le tour d'un périphérique de 10 km *nécessite* 10 L *d'essence et qu'il y ait trois stations-service. La première située au kilomètre* 0 *contient* 5 L *d'essence, la seconde située au kilomètre* 6 *contient* 3 L *d'essence et la dernière, située au kilomètre* 8 *donc à* 2 km *de la première, contient* 2 L *d'essence. Dans ce cas, en partant de la deuxième station-service le tour est possible.*



36 La prédiction impossible

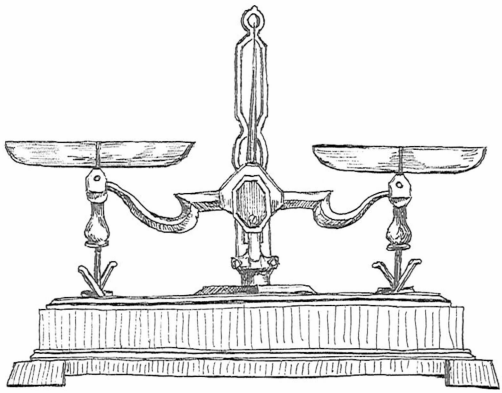
Deux étudiants qui s'ennuient en cours de probabilités préfèrent jouer au jeu suivant. Le premier commence par mélanger un jeu de cinquante-deux cartes classique et demande ensuite au deuxième de deviner la couleur (rouge ou noir) de la première carte. Après la prédiction de son camarade, il lui montre la première carte et lui demande à nouveau de deviner la couleur de la deuxième, puis de la troisième et ainsi de suite jusqu'à la fin du paquet.

En adoptant la meilleure stratégie possible, quelle est la probabilité que l'étudiant réussisse toutes ses prédictions sans aucune erreur ?

37 En trois pesées

Douze poids sont numérotés de 1 à 12. Tous les poids ont la même masse sauf un qui est plus lourd ou plus léger. Le but est de découvrir, à l'aide d'une balance de Roberval, lequel est différent et s'il est plus lourd ou plus léger, le tout en trois pesées maximum.

Comment faire ?



38 Pile ou face dans le noir

Dans une complète obscurité se trouvent cent pièces de monnaie. Elles sont mélangées, mais ce qui est sûr c'est que 75 sont du côté pile et 25 sont du côté face. Comment réussir à les séparer en deux groupes ayant le même nombre de pièces côté face ?

Les deux groupes ainsi formés ne doivent pas nécessairement contenir le même nombre de pièces.

39 Les prisonniers et les chapeaux

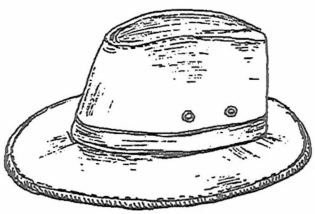
Un directeur de prison logicien propose un jeu à ses cent prisonniers, leur permettant s'ils réussissent d'être libérés. Les prisonniers sont placés sur un escalier de cent marches, un sur chaque marche. Il leur met sur la tête un chapeau, soit blanc soit noir. Ils ne connaissent pas le nombre de chapeaux noirs ni le nombre de chapeaux blancs distribués. Par exemple le directeur peut distribuer soixante-dix chapeaux noirs et trente chapeaux blancs. Chaque prisonnier ne peut voir que les chapeaux des prisonniers sur les marches inférieures. Ainsi le prisonnier en haut de l'escalier voit les chapeaux des quatre-vingt-dix-neuf autres prisonniers, le prisonnier tout en bas ne voit aucun chapeau.

Le directeur interroge le prisonnier du haut sur la couleur de son chapeau, il doit répondre par "blanc" ou "noir", et tous les prisonniers entendent sa réponse. C'est ensuite le prisonnier de la marche inférieure qui est interrogé, et ainsi de suite jusqu'au prisonnier du bas. Les prisonniers qui ont réussi à deviner la couleur de leur chapeau sont sauvés. Les prisonniers peuvent se mettre d'accord avant le début de l'épreuve sur une stratégie.

Trouver une stratégie permettant de sauver un maximum de prisonniers de manière certaine.

Même question s'il n'y a pas deux, mais sept couleurs possibles pour les chapeaux.

Par exemple, une stratégie possible pour les prisonniers est la suivante : le premier, celui du haut, commence par dire la couleur du second, le second répète sa couleur et est sauvé, le troisième dit la couleur du quatrième, le quatrième dit sa couleur et est sauvé, etc. Cette stratégie permet de sauver cinquante prisonniers de manière certaine.



40 Fort Boyaux

Un candidat participe à un célèbre jeu télévisé. Lors de la dernière épreuve, il affronte le maître du jeu. Devant eux, dix pièces sont alignées dans le désordre sur une table. Chaque pièce a une valeur comprise entre 1 et 10 visible par les deux joueurs et toutes les valeurs sont représentées, par exemple comme ci-dessous :

(2) (4) (7) (1) (6) (10) (5) (8) (9) (3)

À tour de rôle chaque joueur prend une des deux pièces situées aux extrémités. Le gagnant est celui qui réussit à ramasser le plus. Le candidat commence. Quelle stratégie peut-il adopter pour gagner à tous les coups ?

Dans l'exemple précédent, il peut commencer par prendre la pièce 2 *ou la pièce* 3. *S'il choisit la pièce* 3, *le maître du jeu aura le choix entre la pièce* 2 *et la pièce* 9, *etc.*

41 Températures terrestres

Montrer que sur la Terre il existe à chaque instant deux endroits du globe diamétralement opposés où la température est la même.

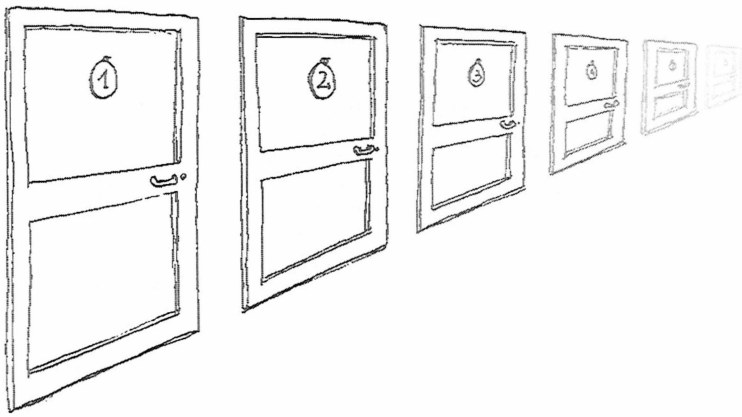
42 L'hôtel de Hilbert

Supposons l'existence d'un hôtel très particulier : il contient une infinité de chambres ! Cet hôtel est constitué d'un couloir infini. Il y a la chambre 1, la chambre 2, la chambre 3, etc. Le couloir ne s'arrête pas et les chambres se succèdent à l'infini. Supposons de plus que cet hôtel soit complet ! Toutes les chambres sont occupées par un client (il y a donc une infinité de clients). Un nouveau client se présente à la réception et demande une chambre.

Comment faire pour lui trouver une place ?

Cette fois-ci, ce n'est pas un nouveau client qui se présente à la réception, mais une infinité de nouveaux clients : il y a le nouveau client numéro 1, le nouveau client numéro 2, le nouveau client numéro 3, etc. Comment faire pour leur trouver à tous une place ?

Il y a une infinité de chambres : la dernière chambre n'existe pas. Pour trouver une place au nouveau client, on ne pas construire de nouvelles chambres ni mettre d'anciens clients à la porte... Tout ce que l'on peut faire, c'est réorganiser la répartition des chambres.



43 L'embarquement erratique

Un avion de ligne a cent places et les cent passagers ont tous une place attitrée. Ils montent un à un dans l'avion. Le premier, ne faisant pas attention à la place qui lui est attitrée, s'assoit à une place au hasard. Le deuxième s'assoit à sa place sauf si elle est déjà occupée par le premier, dans ce cas il en prend une autre au hasard. Le troisième s'assoit à sa place si elle est libre, sinon il en prend une autre au hasard, et ainsi de suite jusqu'au dernier passager.

Quelle est la probabilité que le dernier passager trouve sa place attitrée libre ?

44 Les pirates mutins

Dix pirates se partagent un trésor de cent écus. Le chef, qui est le pirate le plus âgé, décide de la répartition (par exemple tout pour lui et rien pour les autres). Si une majorité stricte de pirates s'oppose à cette répartition, une mutinerie éclate et le chef est passé par-dessus bord. Il ne reste alors que neuf pirates, le second pirate le plus âgé devient le chef, il propose à son tour une répartition et ainsi de suite jusqu'à ce qu'une répartition soit adoptée.

Quelle répartition doit proposer le pirate le plus âgé ?

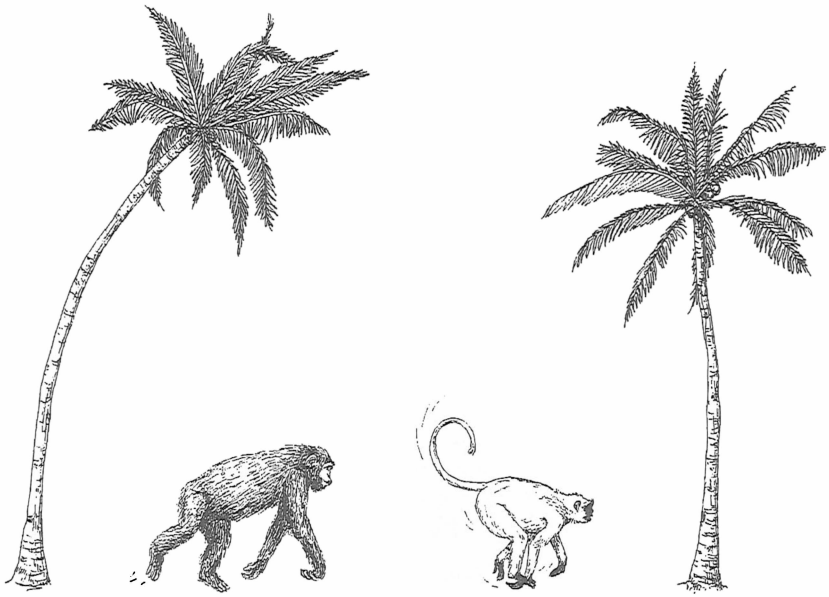
Tous les pirates connaissent les âges de tous les pirates.

45 La course des singes

Un orang-outan et un babouin font la course sur une distance de 3.2 km. L'orang-outan court à la vitesse parfaitement régulière de 5 min et 45 s par km, tandis que le babouin court à une vitesse éventuellement irrégulière mais parcourt chaque intervalle de 1 km en exactement 5 min et 50 s.

Le babouin peut-il battre l'orang-outan ?

Par "chaque intervalle", il faut bien comprendre tous les intervalles de 1 km *possibles. On sait que le babouin va courir le premier kilomètre en* 5 min *et* 50 s, *mais aussi, par exemple, qu'il va courir l'intervalle* [817 m, 1817 m] *dans le même temps.*



46 Les nains voleurs

Sept nains travaillent à la mine pour Blanche Neige. Chaque nain doit rapporter en fin de journée un lingot d'or de 100 g. Certains nains sont honnêtes mais d'autres volent systématiquement 1 g d'or et rapportent des lingots de seulement 99 g. En quatre mois, Blanche Neige a accumulé une centaine de lingots de chaque nain. Elle aimerait savoir qui vole et qui ne vole pas. Pour cela, elle possède une balance magique, à affichage numérique, qui a une précision infinie mais qui ne fonctionne que le temps d'une pesée.

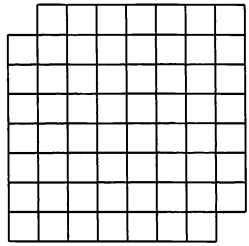
Comment, en une seule pesée, déterminer qui vole et qui ne vole pas ?

47 Huit triangles pour un carré

Découper un carré en huit triangles ayant tous des angles strictement aigus, c'est-à-dire strictement inférieurs à 90°.

48 Comment paver sa salle de bain

Le sol d'une salle de bain est un carré de soixante-quatre carreaux. Suite à des travaux, les carreaux des coins supérieur gauche et inférieur droit sont retirés. Le sol de la salle de bain prend ainsi la forme ci-dessous :



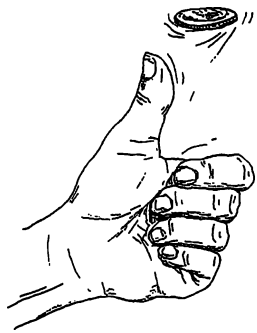
On souhaite le recouvrir d'un carrelage en forme de domino :

Est-ce possible ?

49 Une pièce de plus

Deux frères jouent à pile ou face. Le grand frère prend onze pièces et en donne seulement dix à son petit frère, il a donc une pièce de plus. Ils jettent toutes leurs pièces simultanément puis comptent combien de piles ils ont obtenus.

Dans ces conditions, quelle est la probabilité que le grand frère fasse strictement plus de piles que son petit frère ?



50 Une nouvelle variante de pile ou face

Deux frères jouent à pile ou face, avec une seule pièce. Le grand frère propose à son petit frère de modifier les règles : "Ce n'est pas drôle si le premier lancer détermine le vainqueur. Je propose que l'on lance la pièce jusqu'à ce que trois lancers consécutifs forment la séquence pile - face - face, ou face - face - pile. Si c'est la séquence pile - face - face qui apparaît en premier, je gagne, sinon, si c'est la séquence face - face - pile qui apparaît en premier, tu gagnes". Le petit frère refuse aussitôt, prétendant que ce jeu n'est pas équitable.

Pourquoi ?

Le grand frère se défend : "Il est clair que la probabilité que PFF apparaisse sur trois lancers est égale à celle que FFP apparaisse sur trois lancers, c'est $\frac{1}{8}$. Ainsi, les temps moyens d'apparition sont les mêmes : les séquences apparaîtront en moyenne au bout de huit lancers. Le jeu est donc équitable".

Quelle(s) erreur(s) commet le grand frère ?

Par exemple, si la pièce fait PFPFF, le jeu s'arrête car la séquence PFF est apparue et le grand frère gagne la partie.

51 Le petit frère prend sa revanche

Cette énigme est une généralisation de la précédente. Le petit frère dit à son grand frère qu'il veut bien jouer sous certaines conditions : son grand frère commence par choisir sa séquence de trois lancers, puis il choisit à son tour une séquence de trois lancers différente. La séquence qui apparaît en premier détermine le gagnant.

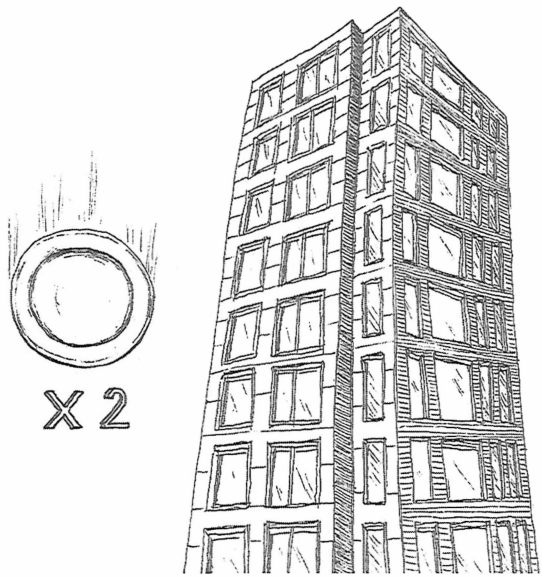
Montrer que, quelle que soit la séquence choisie par le grand frère, le petit frère peut toujours choisir une séquence lui permettant d'être gagnant en moyenne.

52 Les assiettes incassables

Un fabricant d'assiettes veut tester la solidité de ses produits. Il prend pour cela deux de ses assiettes et se rend au pied d'un immeuble de cent étages. Il cherche à déterminer l'étage limite à partir duquel une assiette se casse et ce en minimisant le nombre de lancers.

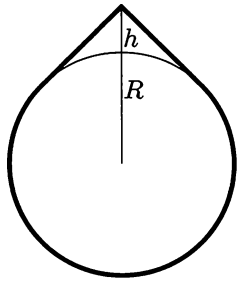
Avec la meilleure stratégie possible, en combien de lancers peut-il déterminer à coup sûr l'étage limite ?

Les deux assiettes ont la même solidité et ne s'usent pas au cours des lancers. Une solution est de lancer une assiette du premier étage, si elle se casse c'est fini, sinon on la ramasse et la lance cette fois du deuxième étage, et ainsi de suite. Avec cette méthode, on fait cent lancers dans le pire des cas, et on utilise qu'une seule assiette. En revanche, avec deux assiettes, on peut par exemple ne tester que les étages pairs dans un premier temps en lançant en $2, 4, 6, \ldots$ *jusqu'à ce que ça casse, puis en l'étage juste inférieur pour trouver le seuil. On a ainsi une stratégie nécessitant* 51 *lancers dans le pire des cas, mais ce n'est toujours pas optimal.*



53 Le câble entourant la Terre

On assimile la Terre à une sphère de rayon $R = 6400\,\text{km}$. Un câble bien serré l'entoure au niveau de l'équateur. On allonge le câble d'un mètre. On tire le câble en un point : il reste dans le plan équatorial, mais est tendu de manière à décoller au maximum.

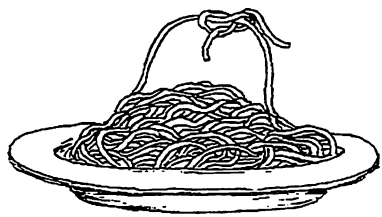


Déterminer de quelle hauteur le câble décolle, c'est-à-dire h.

54 Les spaghettis

Paul a devant lui une assiette de mille spaghettis. Il décide de les nouer de façon à former des boucles. Pour cela, il commence par prendre deux bouts de spaghettis qui dépassent, au hasard, et les noue entre eux. Il réitère l'opération jusqu'à ce que tous les spaghettis soient noués.

À la fin de l'opération, combien a-t-il formé en moyenne de boucles de spaghettis ?

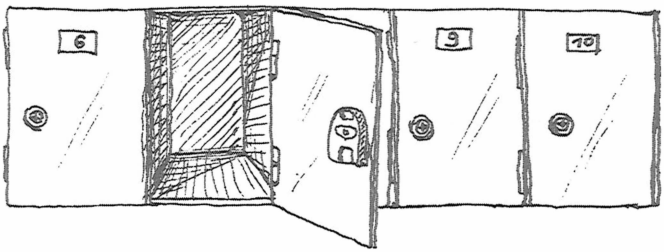


55 Les casiers de la piscine

À la piscine, un petit enfant s'amuse avec les casiers. Il y en a cent, numérotés de 1 à 100, qui sont au départ tous fermés. Il fait un premier passage en ouvrant tous les casiers qui ont comme numéro un multiple de 2. Arrivé au centième casier, il revient au casier 1 et fait un second passage. Cette fois-ci, il ouvre les casiers fermés et ferme les casiers ouverts et ce pour tous les casiers dont le numéro est un multiple de 3. De la même manière, il fait un passage pour les multiples de 4, de 5, et ainsi de suite jusqu'au dernier passage pour les multiples de 100.

Après tous ces passages, quels sont les casiers fermés ?

Lors de son premier passage, l'enfant ouvre les casiers 2,4,...,100 *et laisse les autres fermés. Lors du deuxième passage, il ouvre le casier* 3, *ferme le casier* 6, *ouvre le* 9, *ferme le* 12, *etc.*



56 Rencontres en soirée

Montrer que dans n'importe quel groupe de six personnes il y en a au moins trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas.

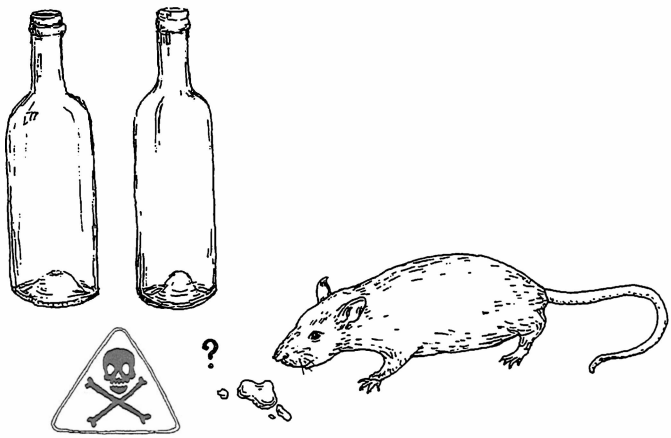
Bien sûr, la relation de connaissance est symétrique : si A connaît B alors B connaît A. Si une personne connaît tout le monde mais que les autres ne connaissent que cette personne, il suffit de considérer un groupe de trois personnes excluant la personne qui connaît tout le monde pour avoir un groupe de trois personnes qui ne se connaissent pas. Par contre, dans ce cas, il est impossible de trouver un groupe de trois personnes qui se connaissent mutuellement.

57 Les rats et les bouteilles

Un roi possède mille bouteilles de vin. Ayant démantelé une conspiration, il sait qu'exactement une bouteille est empoisonnée. Son valet, chargé de déterminer laquelle est-ce, dispose de rats auxquels il peut faire goûter les différentes bouteilles. Si un rat boit du vin empoisonné, il meurt le lendemain. Le roi est impatient et veut savoir dès le lendemain avec certitude quelle est la bouteille empoisonnée.

De combien de rats, au minimum, son valet a-t-il besoin ?

Si chaque rat goûte une bouteille, il faut nécessairement 999 *rats pour déterminer quelle bouteille est empoisonnée. Mais les rats peuvent aussi goûter des mélanges de différentes bouteilles. Par exemple, si le premier rat goûte un mélange des cent premières bouteilles, il meurt le lendemain si et seulement si une des cent premières bouteilles est empoisonnée. Attention, il faudra bien prouver que le nombre de rats proposé est minimum.*



58 La collection de cartes

Un petit garçon veut faire la collection d'un jeu de cartes qui vient de sortir. Il y a cent cartes différentes à collectionner. Le petit garçon achète une carte par jour mais il ne peut pas choisir la carte qu'il achète : chaque carte achetée est une des cent cartes aléatoirement.

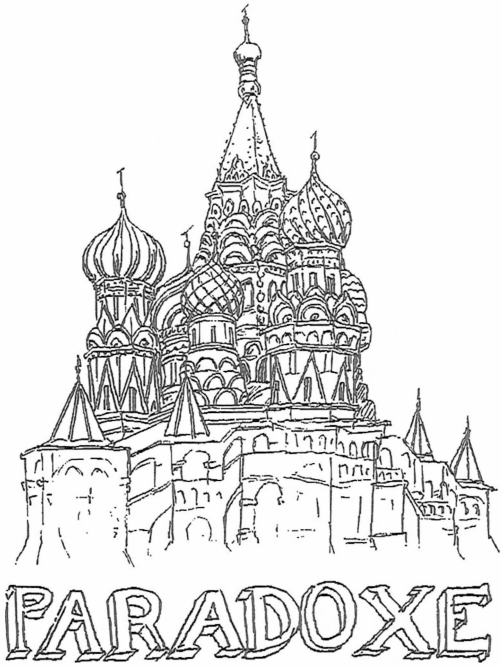
Combien de temps faudra-t-il en moyenne au petit garçon pour terminer sa collection ?

59 Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

Un banquier propose à son client le jeu suivant : il lance une pièce équilibrée, si la pièce tombe sur face, il donne 1 euro à son client et le jeu s'arrête ; sinon il relance la pièce, si la pièce tombe sur face, il donne 2 euros à son client et le jeu s'arrête ; sinon il relance la pièce, si la pièce tombe sur face, il donne 4 euros à son client et le jeu s'arrête, et ainsi de suite. En d'autres termes, le banquier lance la pièce jusqu'à faire face et donne 2^{n-1} euros à son client s'il a fait face au bout du n-ième lancer.

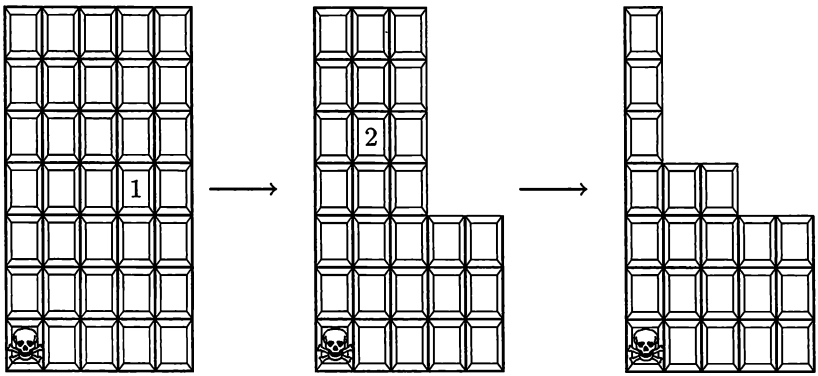
Quel est le prix du jeu ?

Dans ce jeu, le client est toujours gagnant. Déterminer le prix du jeu, c'est déterminer la somme que doit verser le client à son banquier avant que celui-ci ne commence à lancer la pièce pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour qu'aucun des deux ne soit avantagé sur le long terme.



60 La tablette de chocolat

Deux mathématiciens se partagent une tablette de chocolat dont le carré inférieur gauche est empoisonné. Ils imposent la règle suivante : lorsque quelqu'un veut prendre un carré de chocolat, il doit prendre tout le coin supérieur droit avec. Par exemple, sur la figure ci-dessous, le premier a pris le carré 1, puis le deuxième a pris le carré 2.



Chacun prend à tour de rôle un carré plus le coin supérieur droit qui va avec. Celui qui est forcé de prendre le carré empoisonné (lorsqu'il ne reste plus que ce carré) est déclaré perdant !

Montrer qu'il existe une stratégie gagnante pour celui qui commence.

Bien sûr, on ne demande pas d'expliciter la stratégie gagnante : c'est à ce jour un problème ouvert !

61 Le morpion

Deux étudiants inventent un petit jeu. Chacun choisit à tour de rôle un chiffre entre un et neuf. Le premier qui a trois chiffres dont la somme vaut quinze gagne.

Existe-t-il une stratégie gagnante, si oui, pour qui ?

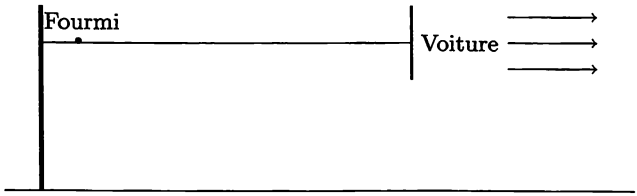
Par exemple, s'ils choisissent tour à tour 2,1,5,8,6,3,9,4, *le deuxième gagne car parmi les quatre chiffres qu'il a choisis (*1,8,3,4*), les trois derniers ont une somme égale à quinze. Noter qu'il peut y avoir égalité, si tous les chiffres sont choisis mais qu'aucun joueur n'en a trois sommant à quinze.*

62 La fourmi contre la voiture

Une voiture de course se trouve à un mètre d'un poteau, auquel elle est reliée par un élastique bien tendu. Sur l'élastique se trouve, au niveau du poteau, une fourmi. La voiture démarre brusquement : elle passe instantanément à la vitesse de 200 km/h. À cet instant précis, la fourmi se met à avancer sur l'élastique vers la voiture qui s'éloigne. Sur la terre ferme, la fourmi irait à 1 m/min, elle a donc une vitesse par rapport à l'élastique de 1 m/min.

La fourmi va-t-elle rattraper la voiture ? Si oui, au bout de combien de temps ?

La voiture roule indéfiniment à 200 km/h *et l'élastique est supposé incassable : il peut se tendre indéfiniment de façon homogène.*

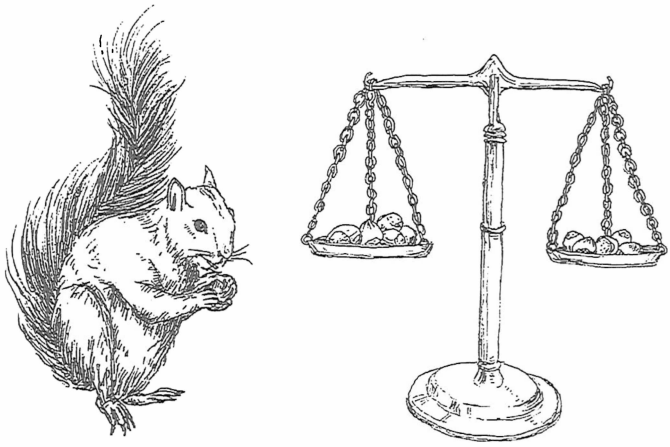


63 L'écureuil et ses noisettes

Un écureuil ramasse onze noisettes. Arrivé à sa cachette, il effectue diverses pesées de son butin. Il s'aperçoit que, quelle que soit la noisette qu'il place de côté, il arrive toujours à séparer les dix autres en deux groupes de cinq noisettes ayant le même poids. On suppose que toutes les noisettes ont un poids qui, exprimé en gramme, est entier.

Montrer que toutes les noisettes ont le même poids.

Supposons que toutes les noisettes aient le même poids. Dans ce cas il est évident que, quelle que soit la noisette que l'écureuil met de côté, il arrive toujours à séparer les dix autres en deux groupes de cinq noisettes ayant le même poids. Supposons maintenant que les noisettes pèsent respectivement 1 g, 2 g, ..., 11 g. *Si l'écureuil met de côté la noisette qui pèse* 2 g, *il peut séparer les dix noisettes restantes en deux groupes de cinq noisettes ayant le même poids : d'un côté les noisettes de* 1 g, 4 g, 6 g, 10 g, 11 g, *de l'autre celles de* 3 g, 5 g, 7 g, 8 g, 9 g. *Par contre, si l'écureuil met de côté la noisette de* 1 g *on montre qu'il lui est impossible de séparer les dix noisettes restantes en deux groupes de cinq ayant le même poids. Ainsi la distribution des poids des noisettes proposée dans ce cas particulier ne fonctionne pas. Il faut montrer que les seules distributions qui fonctionnent sont celles où toutes les noisettes ont le même poids.*

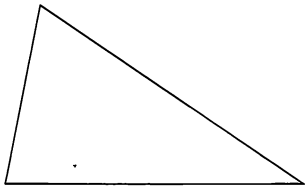


Niveau 3

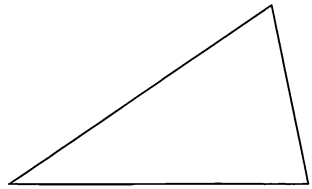
64 Le gâteau triangulaire

Un amoureux, pour fêter l'anniversaire de sa chère et tendre, commande un beau gâteau triangulaire chez le meilleur pâtissier du coin. Dans l'intervalle, il fabrique une boîte triangulaire pour présenter joliment le gâteau. Lorsqu'il va le chercher chez le pâtissier, catastrophe, il se rend compte que ce dernier a bien respecté les mesures mais a fait l'exact symétrique (voir figure ci-dessous). Le gâteau ne rentre donc pas dans la boîte. Dépité, il réfléchit quelques instants et réalise qu'il suffit de deux coups de couteau pour couper le gâteau en morceaux qui, une fois redisposés, rentreront parfaitement dans la boîte.

Comment faire ?



Le gâteau



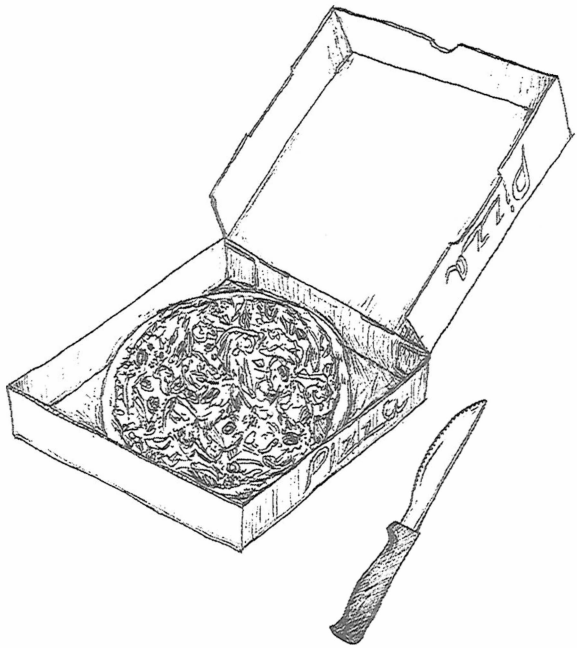
la boîte

Bien sûr, le gâteau est a priori un triangle quelconque. On ne peut pas empiler les parts ni les retourner.

65 Un partage équitable

Pour partager équitablement une pizza entre deux personnes, la première coupe la pizza en deux et la deuxième choisit sa part.

Déterminer sur le même principe une façon équitable de partager une pizza entre n personnes.



66 Le soldat solitaire

Onze soldats sont postés dans un champ. La consigne est claire : chaque soldat doit surveiller le soldat le plus proche de lui.

Montrer qu'il existe au moins un soldat que personne ne surveille.

Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, on suppose que les distances mutuelles entre les soldats sont toutes différentes.

67 Le butin des treize pirates

Treize pirates décident de rassembler leur butin commun dans un même coffre. Ils veulent mettre au point un système qui permette l'ouverture du coffre dès qu'une majorité de pirates souhaite l'ouvrir et qui ne permette pas l'ouverture sinon. Pour cela, ils font appel à un serrurier qui place un certain nombre de cadenas sur le coffre. Pour ouvrir le coffre, il faut ouvrir tous les cadenas. Le serrurier fait pour chaque cadenas des doubles des clés. Il les distribue aux pirates de manière à ce que chaque pirate ait un certain nombre de clés sans toutes les avoir.

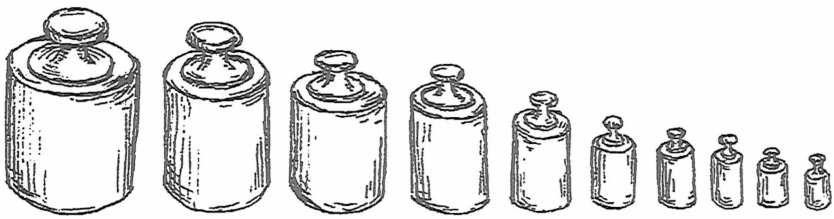
Combien de cadenas au minimum le serrurier doit-il utiliser pour réaliser un tel système ?

Par exemple, s'il n'y a que trois pirates, trois cadenas suffisent : il suffit de donner au premier pirate les clés des cadenas 1 *et* 2*, au deuxième les clés des cadenas* 1 *et* 3 *et au troisième les clés des cadenas* 2 *et* 3*. De cette manière, aucun ne peut ouvrir le coffre seul, mais dès que deux pirates s'associent, ils peuvent l'ouvrir.*

68 Bons poids bonnes mesures

Une balance de Roberval est vendue avec un ensemble de dix poids étalons. Quelles masses doivent avoir ces dix poids pour être capable de peser un maximum d'objets de masse entière consécutive (nombre entier de kg) ?

Par exemple, avec seulement trois poids, un de 1 kg*, un de* 2 kg *et un de* 5 kg*, il est possible de peser tout objet entre* 1 kg *et* 8 kg*. Attention, on ne demande pas simplement un ensemble de poids optimal mais également la preuve de son optimalité.*

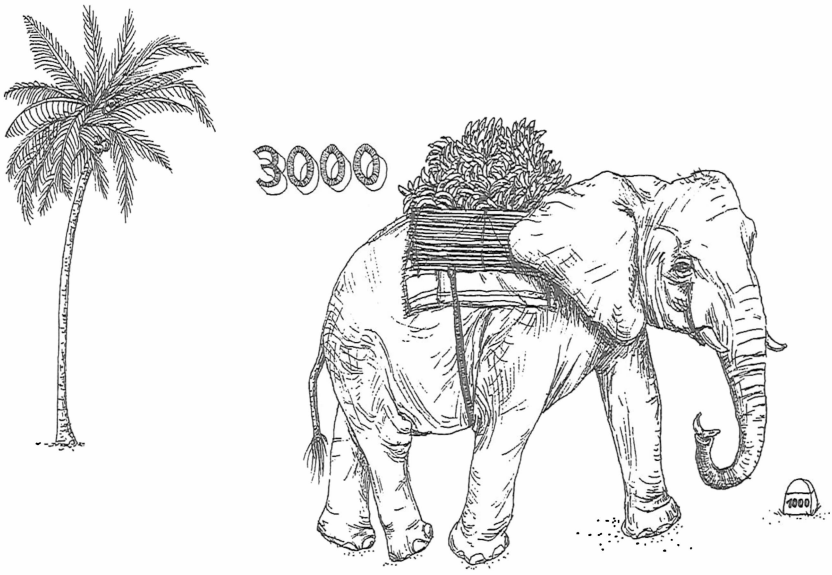


69 L'éléphant et les bananes

Un marchand de bananes a un stock de trois mille bananes qu'il aimerait vendre au marché d'une oasis située à 1000 km. Il dispose, pour transporter la marchandise, d'un éléphant qui consomme une banane par kilomètre et ne peut pas porter plus de mille bananes à la fois.

Combien de bananes au maximum pourra-t-il acheminer à l'oasis ?

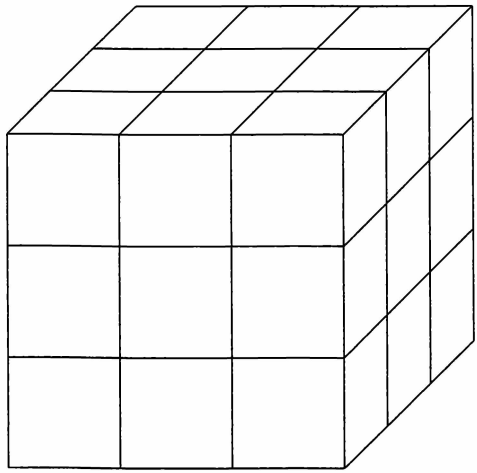
Déjà on constate que si le marchand effectue le trajet sans arrêt, en chargeant au maximum son éléphant, il arrivera à l'oasis sans aucune banane. Il est donc nécessaire de faire le trajet par étapes : l'idée est de déposer de la marchandise sur le chemin, revenir pour reprendre des bananes, puis ramasser les bananes laissées en chemin. Attention, on ne demande pas simplement une stratégie optimale mais également la preuve de son optimalité.

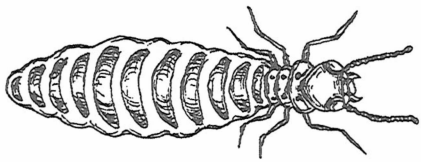


70 Le termite affamé

Un termite mange un cube de bois découpé en vingt-sept petits cubes comme sur le schéma suivant. Il commence par le petit cube de son choix, et après chaque petit cube mangé, il passe à un petit cube adjacent (il ne peut pas aller en diagonale) jusqu'à les avoir tous mangés.

Le termite peut-il terminer son festin par le petit cube central ?



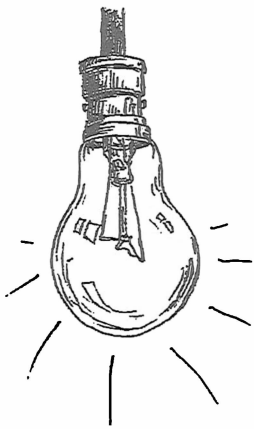


71 Les prisonniers et l'ampoule

Un directeur propose un défi à ses cent prisonniers. "Je vais vous appeler un à un dans mon bureau, éventuellement plusieurs fois, jusqu'à ce qu'un prisonnier puisse m'assurer que tout le monde est passé dans mon bureau auquel cas vous gagnez. Pour que cela soit possible vous pourrez, lorsque vous serez appelé, allumer ou éteindre l'ampoule qui se trouve dans le couloir menant au bureau. Vous ne pourrez pas communiquer entre vous et vous ne saurez donc ni qui est passé avant vous, ni même combien sont passés avant vous. Je continuerai d'appeler chaque prisonnier autant de fois qu'il le faudra tant qu'aucun prisonnier ne m'aura affirmé que tout le monde est passé. Si un prisonnier m'annonce que tout le monde est passé alors que ce n'est pas le cas, vous perdez."

Comment faire pour réussir ce défi ?

Il n'est pas précisé si l'ampoule est initialement allumée ou éteinte. Bien noter que des prisonniers peuvent passer plusieurs fois dans le bureau avant que l'un d'eux annonce que tous les prisonniers sont passés. Si par exemple, tous les prisonniers ont été appelés cinquante fois dans le bureau du directeur avant qu'un prisonnier ne déclare qu'ils sont tous passés, ils ont néanmoins gagné.



72 Les prisonniers et les tiroirs

Le directeur propose une autre épreuve à ses prisonniers. Le principe est le suivant : les prisonniers sont numérotés de 1 à 100 (et connaissent leur numéro), puis sont appelés un à un et une seule fois dans le bureau du directeur où se trouve une commode de cent tiroirs numérotés de 1 à 100. Le directeur a disposé de façon aléatoire dans chaque tiroir un papier portant le numéro d'un prisonnier. Chaque tiroir contient un numéro, et chaque prisonnier a son numéro dans un tiroir. Chaque prisonnier ne peut ouvrir que cinquante tiroirs au plus, et doit trouver son numéro. Les prisonniers ne peuvent pas communiquer entre eux pendant l'épreuve, ne savent pas qui a été appelé avant eux, et ne peuvent pas déplacer les papiers dans les tiroirs. Les prisonniers gagnent s'ils trouvent tous leur numéro. Ils peuvent se mettre d'accord avant le début de l'épreuve sur une stratégie.

Trouver une stratégie donnant aux prisonniers une probabilité de gagner supérieure à 30%.

Déjà, quelle que soit la stratégie adoptée, il est clair que le premier prisonnier appelé n'aura qu'une chance sur deux de trouver son numéro. La probabilité que les prisonniers gagnent est donc inférieure à 50%. À première vue, chaque prisonnier n'a qu'une chance sur deux de trouver son numéro et la probabilité de gagner n'est que $\frac{1}{2^{100}}$, c'est-à-dire quasiment nulle !

73 Les prisonniers et les sept chapeaux

Le directeur, qui ne manque pas d'imagination, invente une nouvelle épreuve pour ses pauvres prisonniers. Il fait venir sept prisonniers et leur décrit la nouvelle épreuve. "Vous allez être placés dans une pièce et je vais poser un chapeau sur chacune de vos têtes. Il y aura sept couleurs possibles : jaune, orange, rouge, bleu, vert, marron ou violet, mais je me réserve le droit de ne pas utiliser toutes ces couleurs. Par exemple, je peux poser si je le souhaite trois chapeaux jaunes et quatre chapeaux violets. Ensuite je vous laisserai quelques minutes pour regarder la couleur des chapeaux de vos camarades. Puis je vous demanderai chacun à tour de rôle de me chuchoter, pour que les autres n'entendent pas, la couleur supposée de votre chapeau. Si au moins l'un de vous devine sa couleur vous gagnez tous, sinon vous perdez".

Quelle stratégie peuvent mettre en place les prisonniers pour réussir cette épreuve ?

Bien sûr, les prisonniers ne voient pas la couleur de leur chapeau et ne peuvent pas communiquer entre eux pendant l'épreuve.

74 Les prisonniers et les t-shirts

Toujours avec sept prisonniers, le directeur a trouvé une variante du jeu de chapeaux précédent : "Cette fois-ci sur chaque chapeau sera inscrit un nombre réel, les sept réels des sept chapeaux étant distincts. Comme d'habitude, vous pourrez voir les chapeaux des autres mais pas le vôtre. Vous devrez ensuite choisir individuellement un t-shirt, soit blanc soit noir, et le revêtir. Puis vous serez ordonnés par ordre croissant des nombres sur les chapeaux. Vous gagnez si vos t-shirts sont de couleurs alternées".

Quelle stratégie peuvent mettre en place les prisonniers pour réussir cette épreuve ?

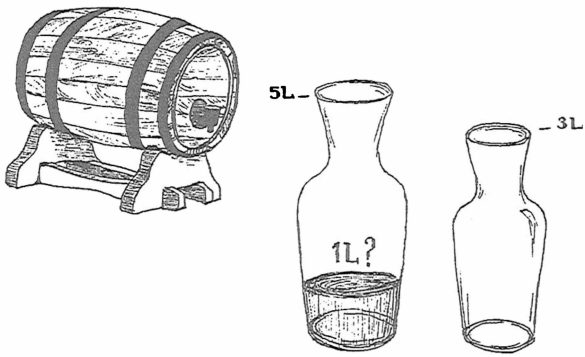
Les prisonniers choisissent leurs t-shirts tous en même temps de manière à ce qu'aucun prisonnier ne puisse tirer d'information de la couleur du t-shirt d'un autre prisonnier.

75 Die Hard

Un vigneron veut prélever un litre de vin de son tonneau, qui contient autant de vin que nécessaire. Il n'a sous la main qu'un pichet de p litres et un pichet de q litres. Ils ne sont pas gradués. On suppose que p et q sont premiers entre eux.

Comment peut-il s'y prendre pour obtenir un litre dans un des deux pichets ?

On pourra commencer par résoudre le cas simple apparaissant dans un célèbre blockbuster : $p = 3$ et $q = 5$.



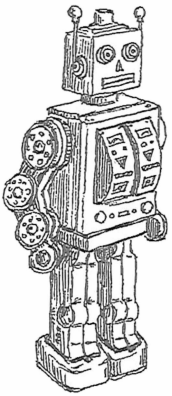
76 Les rats et les bouteilles (bis)

Un roi possède p bouteilles de vin. Ayant démantelé une conspiration, il sait qu'exactement une bouteille est empoisonnée. Son valet, chargé de déterminer laquelle est-ce, dispose de rats auxquels il peut faire goûter les différentes bouteilles. Si un rat boit du vin empoisonné, il meurt le lendemain. Le roi n'est pas pressé, il donne q jours à son valet pour déterminer avec certitude quelle est la bouteille empoisonnée.

De combien de rats, au minimum, son valet a-t-il besoin ?

Comme dans l'énigme 57, le valet va faire goûter à chaque rat un mélange de bouteilles. La différence, c'est qu'il pourra réutiliser le lendemain les rats ayant survécu pour leur faire à nouveau goûter d'autres mélanges et ainsi de suite pendant k jours. Attention, il faudra bien prouver que le nombre de rats proposé est minimum.

77 Où est le robot ?



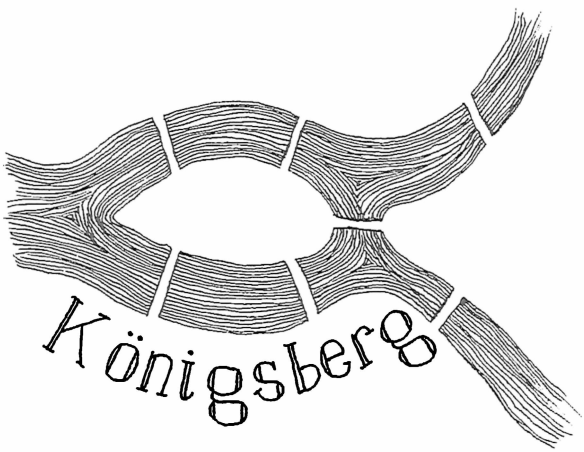
Un robot se déplace sur l'axe des entiers relatifs. À $t = 0\,\mathrm{s}$, il se trouve en un entier relatif m. À chaque seconde, il avance suivant un pas constant p entier relatif. Par exemple si $m = 5$ et $p = -2$, à $t = 1\,\mathrm{s}$, le robot est en 3, à $t = 2\,\mathrm{s}$, en 1, et ainsi de suite.

On ne connaît ni m ni p, mais on peut poser à chaque seconde une question du type "Le robot est-il en n ?", avec n entier relatif, ce à quoi on obtient une réponse binaire (oui ou non).

Mettre au point une stratégie pour trouver le robot à coup sûr au bout d'un certain temps.

78 Les ponts de Königsberg

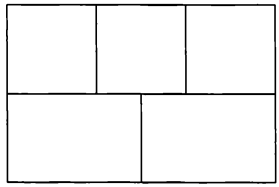
La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad), traversée par la rivière Pregolia, comporte sept ponts disposés comme suit :



Est-il possible, pour un promeneur choisissant judicieusement son point de départ, de parcourir la ville en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts ?

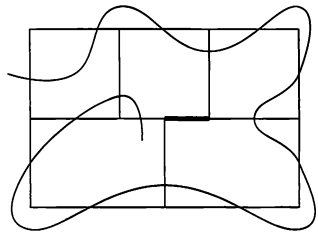
79 Relier les arêtes

On considère la figure ci-dessous :



Est-il possible de tracer sans lever le crayon un trait passant par toutes les arêtes une et une seule fois ?

Par exemple, dans la tentative ci-dessous, l'arête en gras n'a pas été traversée par le trait, c'est raté.



80 Un tour de magie

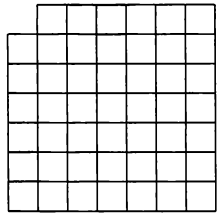
Alice et Bob font un tour de magie avec un paquet de cartes spécial contenant 124 cartes numérotées de 0 à 123. Un spectateur choisit cinq cartes. Il les confie à Bob, qui les examine, en retire une de son choix, puis pose les quatre cartes restantes sur la table, après les avoir ordonnées comme il le souhaite. Ensuite, Alice, qui était à l'écart, regarde les quatre cartes restantes, et détermine la cinquième carte qui avait été retirée !

Comment font-ils ?

La seule façon de communiquer entre Alice et Bob est l'ordre des quatre cartes restantes.

81 Comment paver sa salle de bain (bis)

Le sol d'une salle de bain est un carré de quarante-neuf carreaux. Suite à des travaux, le carreau du coin supérieur gauche est retiré. Le sol de la salle de bain prend ainsi la forme ci-dessous :

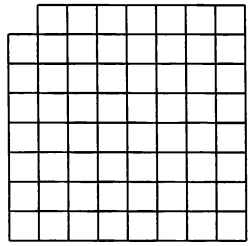


On souhaite le recouvrir d'un carrelage en forme de L, que l'on peut aussi inverser :

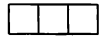
Est-ce possible ?

82 Comment paver sa salle de bain (ter)

Le sol d'une salle de bain est un carré de soixante-quatre carreaux. Suite à des travaux, le carreau du coin supérieur gauche est retiré. Le sol de la salle de bain prend ainsi la forme ci-dessous :



On souhaite le recouvrir d'un carrelage de domino allongé :



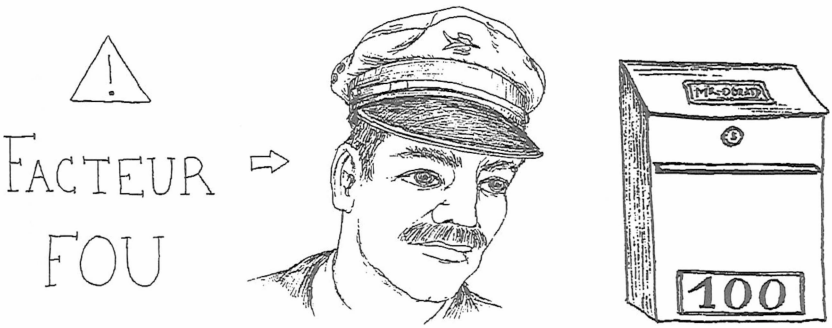
Est-ce possible ?

83 Le facteur fou

Dans un petit village, une rue comptant cent maisons fait une boucle : ainsi la maison numéro 100 est à côté de la maison numéro 1. Un facteur fou distribue le courrier. Il commence par la maison numéro 2 et avance en le distribuant à une maison sur deux en laissant une boîte vide à chaque fois. Ainsi, il commence par distribuer le courrier aux numéros $2, 4, \ldots, 100$, puis à la maison numéro 3, la numéro 7, la 11, etc.

Quelle maison reçoit en dernier son courrier ?

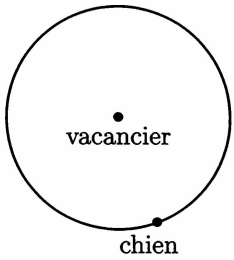
Par exemple avec six maisons, le facteur commence par distribuer le courrier aux numéros 2, 4 *et* 6 *puis aux numéros* 3 *(il saute le numéro* 1 *et il ignore le numéro* 2*),* 1 *(il ignore le numéro* 4 *et il saute le numéro* 5*) et enfin il termine par le numéro* 5*.*



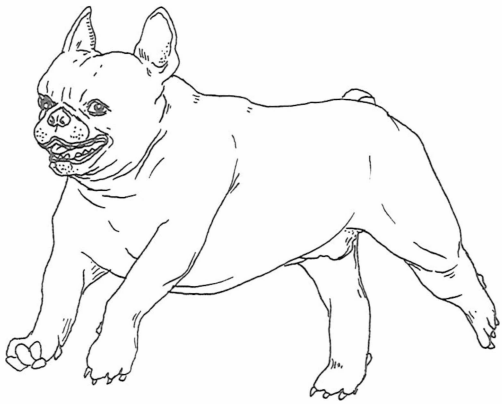
84 Attention, chien méchant

Un vacancier se baigne dans un lac circulaire. Sur le rebord du lac se trouve un chien astreint à se déplacer sur ce cercle qui lui court après : à tout instant le chien cherche à être le plus près possible du malheureux vacancier.

À quelle vitesse minimale et selon quelle trajectoire doit nager le vacancier pour échapper au chien à la sortie du lac ?



Le vacancier court plus vite que le chien sur la terre ferme donc s'il atteint le bord du lac avant le chien, il peut s'échapper. Par exemple, si le vacancier nage à une vitesse supérieure à $\frac{v}{\pi}$, avec v la vitesse du chien, il peut s'échapper. En effet, il lui suffit de se placer au centre du lac, puis de nager vers le point diamétralement opposé au chien. Mais il peut s'en sortir à une vitesse strictement inférieure à $\frac{v}{\pi}$ et même strictement inférieure à $\frac{v}{1+\pi}$. Attention, il faudra bien prouver que la vitesse limite proposée est minimale.

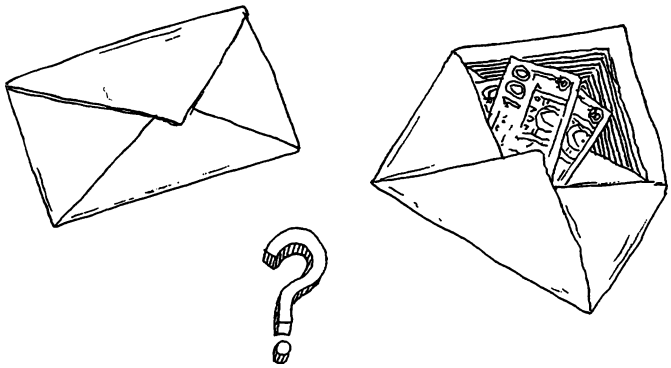


85 Les deux enveloppes première version

Un banquier, qui est de très bonne humeur, propose à son client le jeu suivant. Il remplit deux chèques à son nom avec des montants différents sur chaque chèque. Il place chaque chèque dans une enveloppe. Les deux enveloppes sont identiques. Si le client doit choisir une des deux enveloppes et l'ouvrir, alors il gagne en moyenne $\frac{M_1+M_2}{2}$ où M_1 et M_2 sont les montants inscrits sur les chèques. Le banquier lui propose quelque chose de différent : le client doit choisir une des deux enveloppes, l'ouvrir, regarder le montant du chèque qu'elle contient et choisir de garder ce montant ou de changer d'enveloppe pour encaisser l'autre montant.

Existe-t-il une stratégie permettant au client de gagner en moyenne plus de $\frac{M_1+M_2}{2}$?

Il semblerait que non car le client n'a aucune information sur M_1 et M_2, il sait juste que ces deux montants sont positifs et différents. Et pourtant...



86 Les deux enveloppes deuxième version

Cette fois-ci, le banquier affirme à son client avoir mis un montant au hasard dans une enveloppe et le double de ce montant dans l'autre. Il lui tend les deux enveloppes identiques et le client doit en choisir une. Il en prend une des deux de façon arbitraire (de toute façon les deux enveloppes sont identiques) par exemple celle de gauche. C'est alors que le banquier prétend lui démontrer qu'il ferait mieux de choisir l'enveloppe de droite !

Voici son raisonnement : "Soit x le montant de l'enveloppe de gauche (on ne connaît pas x car elle n'a pas été ouverte). Le montant de l'enveloppe de droite a une chance sur deux d'être $2x$, une chance sur deux d'être $\frac{x}{2}$, ainsi l'enveloppe de droite contient en moyenne

$$\frac{1}{2} \times 2x + \frac{1}{2} \times \frac{x}{2} = \frac{5}{4}x$$

ce qui est strictement supérieur à x, il est donc bénéfique de changer d'enveloppe !"

Cela est absurde, car les deux enveloppes étant identiques, il n'y a pas de meilleure stratégie que d'en choisir une arbitrairement. Ce n'est pas en hésitant successivement entre l'enveloppe de gauche et l'enveloppe de droite que le gain moyen va augmenter.

Où est la faille dans le raisonnement du banquier ?

87 L'écureuil et ses noisettes (bis)

Un écureuil ramasse onze noisettes. Arrivé à sa cachette, il effectue diverses pesées de son butin. Il s'aperçoit que, quelle que soit la noisette qu'il place de côté, il arrive toujours à séparer les dix autres en deux groupes de cinq noisettes ayant le même poids.

Montrer que toutes les noisettes ont le même poids.

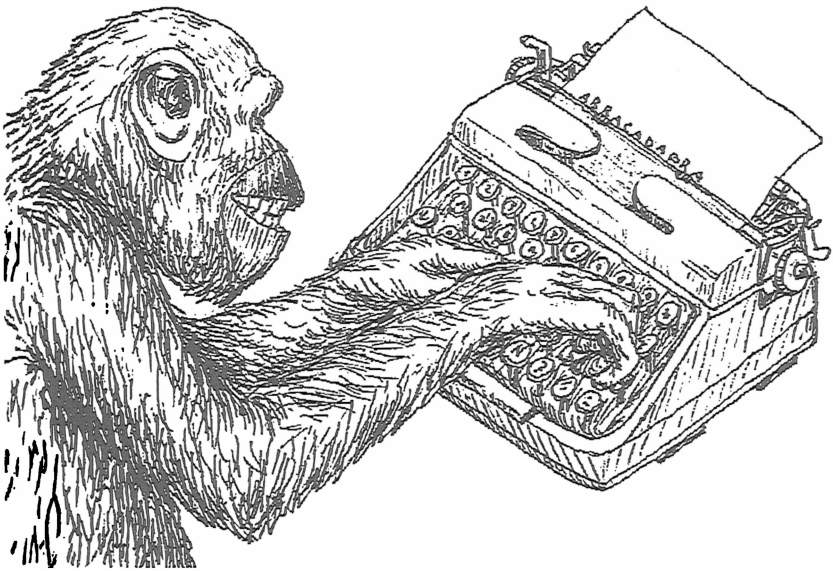
On ne fait plus l'hypothèse que les poids sont entiers comme c'est le cas dans l'énigme 63.

88 Le singe savant

Un singe tape au hasard sur une machine à écrire ne comportant que vingt-six touches, une par lettre de l'alphabet. Il tape aléatoirement, à la vitesse constante d'une lettre par seconde. Il ne privilégie aucune lettre : toutes les lettres ont à chaque seconde la probabilité $\frac{1}{26}$ d'être tapées. Soit t_1 le temps moyen au bout duquel le singe finit par taper "abracadabra" et t_2 le temps moyen pour taper "abracadabrx".

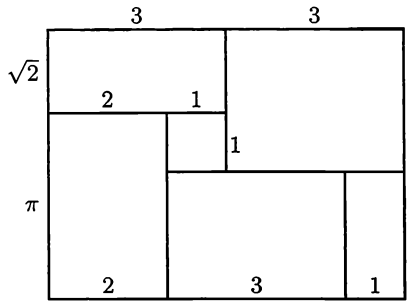
Comparer t_1 et t_2.

Le mot "abracadabra" a onze lettres, il a donc une probabilité $\frac{1}{26^{11}}$ *d'être tapé en* 11 s. *Il en est de même du mot "abracadabrx", ce qui pourrait conduire à penser que leurs temps moyens d'apparition sont les mêmes. Il n'en est rien cependant, voir l'énigme* 50 *pour plus de détails sur ce type de raisonnement erroné.*



89 Un rectangle à côtés entiers

Un grand rectangle est partitionné en petits rectangles ayant tous au moins un côté entier, par exemple comme dans l'exemple ci-dessous :



Montrer que le grand rectangle a au moins un côté entier.

Par exemple, sur la figure, la longueur du grand rectangle est un entier (mais pas sa largeur).

90 Trouver le bon câble

Un électricien a relié deux maisons avec dix câbles électriques. Les câbles partent de la première maison où leurs points de départ portent des numéros de 1 à 10 et arrivent à la seconde maison où leurs points d'arrivée portent des lettres de A à J. L'électricien s'est emmêlé les pinceaux en numérotant les câbles et ne sais plus à quel point de départ correspond quel point d'arrivée. Pour s'y retrouver, il dispose d'une lampe, d'une batterie et d'autant de dominos qu'il le souhaite, afin de relier les câbles.

Comment peut-il, en partant de la première maison et en un seul aller-retour, retrouver les couples point de départ/point d'arrivée qui correspondent ?

Il peut par exemple relier avec des dominos les points de départ 1 *et* 2 *puis aller à la deuxième maison, brancher la batterie au point d'arrivée A et la lampe au point B. Si elle s'allume c'est que le point* 1 *correspond au point A (c'est-à-dire qu'ils appartiennent au même câble) et que le point* 2 *correspond au point B ou qu'inversement le point* 1 *correspond au point B et le point* 2 *au point A. Si elle ne s'allume pas, il sait que le couple de points A/B ne correspond pas au couple de points* 1/2.

91 Intégration forcée

C'est la rentrée. Parmi les trente élèves de la classe, certains se connaissent depuis l'année dernière. Pour favoriser l'intégration, le professeur souhaite diviser la classe en deux groupes, pas forcément avec le même nombre d'élèves dans chaque groupe, pour que chaque élève connaisse moins (au sens large) de personnes dans son groupe que dans l'autre.

Comment peut-il faire ?

Bien sûr, la relation de connaissance est symétrique : si un élève A connaît un autre élève B alors l'élève B connaît l'élève A. Par contre, elle n'est pas forcément transitive : il se peut qu'un élève A connaisse un élève B et que l'élève B connaisse un élève C sans que l'élève A ne connaisse l'élève C. Le professeur connaît parfaitement toutes ces relations et doit diviser la classe en fonction.

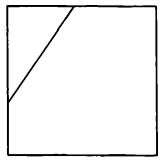
92 Rouge ou noir ?

Laurent propose à Marianne un petit jeu avec un paquet de cinquante-deux cartes standard. Laurent va dévoiler à Marianne les cinquante-deux cartes une à une. Au moment de son choix, Marianne devra prédire que la prochaine carte sera rouge. Marianne pourra prendre en compte la couleur des cartes dévoilées pour choisir l'instant propice pour sa prédiction, mais elle devra impérativement la faire à un moment, même si toutes les cartes rouges sont passées.

Existe-t-il une stratégie lui permettant d'avoir plus d'une chance sur deux de réussir ?

93 Trouver le câble

Un paysan a un champ carré de 1 km de côté. Il sait qu'un câble passe sous son champ, et que ce câble est rectiligne. Par exemple, le câble peut être situé comme ci-dessous :



Pour le localiser, il envisage de creuser des tranchées. Il peut par exemple creuser suivant les deux diagonales du carré. De cette manière il est sûr d'intercepter le câble. Cependant, cela nécessite de creuser sur une longueur $2\sqrt{2} \simeq 2.83$ km.

Trouver une stratégie permettant de creuser à coup sûr moins de 2.64 km.

94 Un bilan mitigé

Un grand groupe industriel tient une conférence de presse pour annoncer ses résultats. Le PDG dit fièrement : "Notez que sur toute période de huit mois consécutifs, le groupe a fait du profit". Un actionnaire l'interrompt : "Oui, mais sur toute période de cinq mois consécutifs, le groupe a fait des pertes".

Sur combien de mois au plus porte ce bilan ? Le lecteur motivé pourra aussi s'intéresser au cas général en remplaçant cinq par p et huit par q, avec p, q deux entiers premiers entre eux.

On supposera que les gains et les pertes sont stricts, c'est-à-dire que zéro n'est ni un gain, ni une perte. Par exemple, ce bilan peut porter sur les huit derniers mois. En effet, il suffit que le groupe ait fait $+1$ à tous les mois sauf au quatrième où il a fait -6. Le groupe est effectivement dans le positif sur toute période de huit mois consécutifs (il n'y en a qu'une, qui est à $+1$), et il est dans le négatif pour toute période de cinq mois consécutifs (-2).

95 L'échiquier à pièces

Alexis propose un défi à Ivan et Dimitri : il pose soixante-quatre pièces sur un échiquier, une sur chaque case, sur pile ou sur face. Il montre l'échiquier à Ivan et lui désigne une case qui sera la case secrète. Ivan doit alors retourner une pièce et une seule, celle de son choix. Une fois la pièce retournée, Ivan se retire et Alexis présente l'échiquier à Dimitri qui le voit pour la première fois. Ce dernier doit alors déterminer, simplement en regardant l'échiquier, la case secrète.

Quelle stratégie Ivan et Dimitri peuvent-ils mettre en place pour remporter le défi ?

Question bonus : montrer que la mise en place d'une stratégie gagnante n'est possible que sur un plateau de jeu ayant un nombre de cases égal à une puissance de deux.

96 Les prisonniers et les chapeaux réels

Considérons une infinité dénombrable de prisonniers placés sur un escalier avec une infinité de marches : la marche numéro 0 est tout en haut, il y a ensuite la marche numéro 1, numéro 2, etc. L'escalier descend infiniment bas. Le directeur choisit pour chaque prisonnier un chapeau sur lequel est inscrit un nombre réel. On ne sait rien de la suite réelle ainsi formée, le directeur la choisit comme il veut. Chaque prisonnier sait sur quelle marche il se trouve mais ne peut voir que les chapeaux des prisonniers sur les marches inférieures. Ainsi le prisonnier en haut de l'escalier voit les chapeaux de tous les autres prisonniers, et chaque prisonnier voit un nombre infini de chapeaux.

Les prisonniers doivent annoncer tous en même temps les réels qu'ils portent sur leur tête. Ils peuvent se mettre d'accord avant le début de l'épreuve sur une stratégie.

Trouver une stratégie permettant qu'il n'y ait toujours qu'un nombre fini de prisonniers qui se trompent.

Contrairement à l'énigme 39, *les prisonniers ne peuvent pas avoir de l'information en écoutant les déclarations des autres car ils doivent tous annoncer en même temps leur réel. Si le directeur choisit pour chacun des prisonniers et de façon indépendante un réel tiré suivant la loi uniforme entre* 0 *et* 1, *il semblerait qu'aucun prisonnier ne peut deviner son réel, et pourtant ils réussissent presque tous.*

97 Les prisonniers et les chapeaux (bis)

Cette énigme est une généralisation de l'énigme 39. Cette fois-ci il y a une infinité dénombrable de prisonniers. Ils sont placés sur un escalier avec une infinité de marches : la marche numéro 0 est tout en haut, il y a ensuite la marche numéro 1, la marche numéro 2, etc. L'escalier descend infiniment bas. Le directeur leur met sur la tête un chapeau, soit blanc soit noir. On ne sait rien de la répartition des couleurs, par exemple le directeur peut ne distribuer que des chapeaux blancs. Chaque prisonnier ne peut voir que les chapeaux des prisonniers sur les marches inférieures. Ainsi le prisonnier en haut de l'escalier voit les chapeaux de tous les autres prisonniers et chaque prisonnier voit un nombre infini de chapeaux.

Le directeur interroge le prisonnier du haut sur la couleur de son chapeau, il doit répondre par "blanc" ou "noir", et tous les prisonniers entendent sa réponse. C'est ensuite le prisonnier de la marche numéro 1 qui est interrogé, et ainsi de suite jusqu'à avoir interrogé tous les prisonniers (on peut imaginer que le temps de réponse diminue exponentiellement). Les prisonniers peuvent se mettre d'accord avant le début de l'épreuve sur une stratégie.

Trouver une stratégie permettant qu'il n'y ait au plus qu'un seul prisonnier qui se trompe.

Il est clair que le prisonnier du haut n'ayant aucune information sur la couleur de son chapeau, il ne peut pas trouver de manière certaine la couleur de son chapeau. Comme dans l'énigme 39*, il faut que son erreur soit utile aux autres car les autres prisonniers doivent faire un sans-faute.*

98 Une dernière énigme avec des prisonniers

Cent prisonniers sont appelés un à un et une seule fois dans le bureau du directeur où se trouve une infinité de tiroirs numérotés : il y a le tiroir numéro 0, le tiroir numéro 1, le tiroir numéro 2, etc. Dans chaque tiroir le directeur a inscrit un réel de son choix. On ne sait rien de la suite réelle ainsi formée, elle a été choisie arbitrairement par le directeur. Chaque prisonnier peut ouvrir des tiroirs comme il veut, il peut même en ouvrir une infinité, mais il doit s'arrêter à un moment et faire une prédiction sur le réel inscrit dans un tiroir qu'il n'a pas ouvert (il est donc interdit d'ouvrir tous les tiroirs). Ensuite tous les tiroirs sont refermés et le prisonnier suivant est appelé. Les prisonniers ne peuvent pas communiquer entre eux pendant l'épreuve. Ils peuvent se mettre d'accord avant le début de l'épreuve sur une stratégie.

Trouver une stratégie permettant à au moins 99 prisonniers de faire une bonne prédiction.

99 Le commandant laxiste

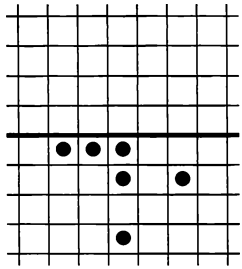
Lors du passage en revue des troupes, les soldats sont généralement tous alignés. Un commandant autorise ses soldats à se placer comme ils le souhaitent à condition toutefois, pour ne pas trop enfreindre l'ordre militaire, que chaque alignement de soldats soit formé d'au moins trois soldats.

Montrer que cela ne va pas changer la disposition habituelle : les soldats seront nécessairement tous alignés.

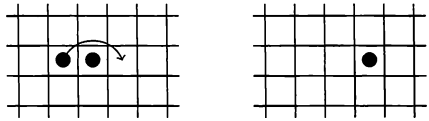
Formulé différemment, ce problème consiste à montrer que si un ensemble fini de points du plan est tel que toute droite passant par deux points de l'ensemble contient au moins un troisième point de l'ensemble alors tous les points de l'ensemble sont alignés.

100 Le solitaire

On dispose d'un quadrillage infini sur lequel sont placées des billes dans le demi-plan inférieur délimité par une ligne.



Les billes peuvent se déplacer comme au jeu du solitaire, c'est-à-dire qu'une bille peut "sauter" par-dessus une autre (horizontalement ou verticalement mais pas en diagonale), qui est alors retirée.



Le but est d'envoyer une bille le plus haut possible au-delà de la ligne. Quelle hauteur maximale peut-on atteindre ?

Par exemple, sur la grille ci-dessus, il ne sera pas possible d'aller à plus de deux cases au-delà de la ligne. Cependant, avec une bonne configuration des billes sous la ligne, on peut faire mieux.

Deuxième partie

Indications

1 Il est clair qu'ouvrir quatre maillons suffit, mais est-ce optimal ?

2 Le plus simple est de commencer par réfléchir à ce qu'il se passe lorsqu'il n'y a que deux fourmis qui tombent sur le bâton, puis lorsqu'il n'y a que trois fourmis.

3 Déterminer le prix d'un gâteau en réfléchissant au prix total des gâteaux.

4 Le plus simple est de raisonner sur la masse de la frite, qui reste constante lorsque Jacques enlève du ketchup.

5 Les points de départ possibles se trouvent plutôt au Sud ! L'explorateur, allant 1000 km vers le Sud, se retrouve sur un parallèle. À quelle condition sur ce parallèle l'explorateur retrouvera-t-il sa position initiale en retournant vers le nord ?

6 Que se passe-t-il lorsqu'on allume les deux extrémités d'une liane simultanément ?

7 Il faut ajouter une pilule A aux trois autres puis découper judicieusement les quatre pilules.

8 On pourra supposer dans un premier temps que la distance entre sa maison et son travail est de 40 km et s'intéresser au temps total du trajet aller-retour si sa moyenne sur l'aller-retour est de 40 km/h.

9 Que se passe-t-il s'il y a beaucoup de courant ?

10 Le plus simple est d'imaginer le point de vue d'une sage-femme.

11 Il n'y a aucun calcul à faire.

12 Que se passe-t-il lors de la dernière opération qui rend les deux mélanges équilibrés ?

13 Il faut poser à l'un des gardes une question en rapport avec l'autre garde.

14 Toto a deux possibilités pour commencer à monter l'escalier : soit il monte la première marche, soit il la saute. Combien a-t-il de façons de finir sa montée dans chaque cas ?

15 Il n'y a aucun calcul à faire.

16 On pourrait croire qu'il manque des informations (distance entre l'école et la maison, vitesse de la voiture, etc.) mais tout est là. Il faut juste éviter de se lancer dans des calculs : la solution est très courte si l'on s'y prend bien.

17 On pourra considérer le petit cube central.

18 La somme est de 89 et c'est à l'adversaire de jouer. Que se passe-t-il ?

19 L'idée est de calculer combien de salons les trois peintres peignent ensemble en trente heures.

20 On pourra raisonner par l'absurde.

21 Tracer la distance du cadre à sa maison en fonction de l'heure.

22 L'étudiant pose la première pièce au centre de la table. Que peut-il faire ensuite ?

23 Le plus simple est de calculer la probabilité pour que personne n'ait son anniversaire le même jour.

24 Que se passe-t-il avec un serpent ? Avec deux serpents ? Avec trois serpents ? Il faut ensuite faire un raisonnement par récurrence (voir le rappel 5).

25 Il faut utiliser la formule de Bayes (voir le rappel 8).

26 Le nombre de calculs traités dans chacun des cas doit être différent. On peut ainsi donner plus ou moins de "poids" aux pourcentages.

27 On pourra considérer le moment où le basketteur passe au-dessus de 75% de réussite.

28 Il faut essayer toutes les possibilités : quels sont les âges possibles et quelles sommes cela implique-t-il ?

29 La solution n'est pas très compliquée, mais il faut tâtonner pour la trouver.

30 Que se passe-t-il s'il n'y a seulement que deux femmes infidèles dans la ville ? Seulement trois ? Seulement quatre ? Il faut ensuite faire un raisonnement par récurrence (voir le rappel 5).

31 Il faut utiliser la formule de Bayes (voir le rappel 8) pour calculer la probabilité qu'au moins un enfant soit un garçon sachant qu'au moins un enfant s'appelle Sophie, on doit trouver $\frac{1}{2-\frac{\varepsilon}{2}}$.

32 Montrer qu'en changeant de porte le candidat a deux chances sur trois de gagner.

33 On pourra commencer par trouver des puzzles à 6, 7 et 8 pièces puis en déduire que pour tout $n \geq 6$ il existe un puzzle à n pièces.

34 Si le bon arrive à tuer le truand, il se retrouve dans un duel contre la brute où la brute a l'avantage puisqu'elle commence à tirer, tandis que si le bon tire en l'air il va se retrouver en duel contre la brute ou le truand mais en étant le premier à tirer.

35 On pourra raisonner par récurrence (voir le rappel 5).

36 Il ne faut pas raisonner "carte par carte", mais diviser le nombre de cas où la prédiction est juste par le nombre total de cas. Il faut utiliser les coefficients binomiaux (voir le rappel 2).

37 On peut commencer par disposer d'un côté les poids 1 à 4, de l'autre les poids 5 à 8. Le plus simple pour trouver la solution est d'utiliser la méthode de comparaison résultats/solutions (voir le rappel 1).

38 Il va falloir retourner des pièces.

39 Dans le cas où il n'y a que deux couleurs, le prisonnier du haut doit donner une information globale de type binaire. Avec sept couleurs, il est conseillé d'utiliser les modulos (voir le rappel 6).

40 Il faut séparer les dix pièces en deux groupes de cinq pièces.

41 Considérer la fonction qui à un endroit du globe associe la différence de température entre cet endroit et l'endroit opposé.

42 Pour la deuxième question, penser à la parité.

43 Aucun calcul !

44 Que se passe-t-il avec deux pirates ? avec trois pirates ? avec quatre pirates ? etc.

45 Vérifier que si le babouin court alternativement 500 m à une certaine vitesse puis 500 m à une autre vitesse, il a néanmoins une vitesse moyenne sur chaque kilomètre constante.

46 Il va falloir poser sur la balance un nombre de lingots différent pour chaque nain.

47 Si l'on se donne deux points, dans quelle zone doit se trouver un troisième pour former un triangle aigu ?

48 On pourra penser à un échiquier avec ses cases blanches et noires.

49 Aucun calcul !

50 Distinguer les cas suivant le résultat des deux premiers lancers. Le petit frère peut-il gagner si les deux premiers lancers ne sont pas FF ?

51 Ce qui rend le grand frère gagnant dans l'énigme précédente, c'est que la fin de sa séquence PFF est le début de celle du petit frère FFP. Il faut tâcher d'utiliser cet avantage. Par symétrie, il n'y a que quatre cas, dont un déjà traité, à examiner : PPP, PPF, PFP et FPP.

52 On pourra se poser la question à l'envers en se demandant d'où peut-on lancer la première assiette si on n'a le droit qu'à n essais maximum.

53 On pourra utiliser les approximations suivantes pour x "petit" :

$$\tan(x) \simeq x + \frac{x^3}{3} \quad \cos(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \frac{1}{1+x} \simeq 1 - x$$

54 Poser b_n le nombre moyen de boucles que Paul obtient en moyenne avec une assiette de n spaghettis et obtenir une relation de récurrence sur b_n.

55 Raisonner sur la parité du nombre de diviseurs du numéro de chaque casier.

56 Il est conseillé de faire un graphe dont les six sommets représentent les six personnes et les arêtes les relations de connaissance/non-connaissance. En considérant une des six personnes, commencer par montrer qu'elle a trois liaisons de même nature.

57 Il faut d'abord se demander combien de rats sont nécessaires. Pour cela, utiliser la comparaison résultats/solutions détaillée dans le rappel sur le principe des tiroirs. De plus, il faut numéroter les rats en base 2 (voir le rappel 7).

58 Noter c_k le nombre moyen de cartes qu'il faut acheter pour terminer la collection sachant qu'on a déjà k cartes distinctes et obtenir une relation de récurrence sur les c_k.

59 Commencer par supposer (de manière réaliste) que le banquier n'a pas une somme d'argent infinie à donner au client.

60 Que se passe-t-il si celui qui joue en deuxième a une stratégie gagnante ?

61 Le titre de l'énigme est une indication !

62 Ajouter la vitesse absolue de la fourmi, 1 m/min, à la vitesse du point de l'élastique où elle se trouve.

63 Le plus simple est de raisonner sur la parité des poids.

64 On pourra commencer par résoudre le problème en un seul coup de couteau dans le cas où le gâteau est un triangle rectangle, puis se ramener à ce cas.

65 Il existe de nombreuses façons de procéder, aucune n'est facile à trouver. Une possibilité est de construire la méthode de partage par récurrence sur n. On pourra commencer par réfléchir au cas $n = 3$, en essayant de se ramener au cas précédent où il n'y a que deux personnes.

66 Considérer les deux soldats se trouvant à la distance mutuelle minimale.

67 Il faut considérer tous les groupes de six pirates possibles.

68 Chaque pesée ayant trois issues possibles, combien de poids pourra-t-on discriminer au maximum ? On pourra utiliser le principe résultats/solutions détaillé dans le rappel sur le principe des tiroirs.

69 La réponse est 533. Le plus dur est de justifier que l'on ne peut pas faire mieux.

70 Il faut colorier certaines cases du cube.

71 On pourra commencer par supposer que l'ampoule est initialement éteinte et que les prisonniers le savent.

72 Les événements "le prisonnier n trouve son numéro" ne sont pas forcément indépendants : les prisonniers peuvent trouver une stratégie qui lie ces événements. Cette énigme nécessite l'utilisation des permutations (voir le rappel 4).

73 Il faut utiliser les modulos. Se reporter éventuellement au rappel sur la congruence.

74 Il faut utiliser la signature (voir le rappel 4).

75 Il suffit de verser le contenu d'un pichet dans le second et recommencer autant de fois qu'il le faut cette même opération. Il reste à démontrer ce résultat.

76 Commencer par raisonner sur deux jours ($q = 2$) en se demandant, avec un nombre fixé de rats, combien de bouteilles est-il possible de discriminer. Il faut utiliser la méthode de comparaison résultats/solutions (voir le rappel 1).

77 On pourra considérer une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (voir le rappel 4).

78 Penser à la théorie des graphes.

79 Penser à la théorie des graphes.

80 Il faut utiliser les modulos. Se reporter éventuellement au rappel sur la congruence.

81 Il faut colorier les carreaux de la salle de bain en colonne.

82 Il faut colorier les carreaux de la salle de bain avec trois couleurs.

83 Commencer avec deux maisons, trois maisons, etc. en numérotant les maisons en base 2 (voir le rappel 7).

84 Trouver le disque dans lequel le vacancier a une plus grande vitesse angulaire que le chien. Quelle est la meilleure façon de sortir de ce disque ?

85 Une stratégie naturelle consiste à se fixer un montant à partir duquel on s'estime content, par exemple 100 euros, et d'encaisser le premier chèque s'il est supérieur à 100 euros, d'encaisser l'autre sinon. Est-ce que cette stratégie permet de faire mieux que $\frac{M_1+M_2}{2}$ dans tous les cas ? Sinon, comment l'améliorer ?

86 Penser au biais d'équiprobabilité : ce n'est pas parce qu'il y a deux possibilités qu'elles sont toujours équiprobables.

87 On pourra traduire les conditions sur les poids avec une matrice et faire un calcul de déterminant.

88 On peut comparer t_1 et t_2 sans faire de calcul, mais il faut se méfier des faux raisonnements : de fait, $t_1 \neq t_2$. Que se passe-t-il lorsque le singe a tapé "abracadabr" ?

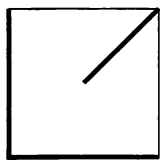
89 On peut se convaincre en faisant des dessins de la véracité du résultat, mais le démontrer s'avère délicat. Il y a plusieurs démonstrations possibles, plus ou moins savantes. Une façon astucieuse de procéder est de considérer un pavage noir et blanc adapté, un peu comme dans l'énigme de la salle de bain.

90 Commencer par relier les points 2 et 3 ensemble, les points 4, 5, 6 ensemble et les points 7, 8, 9, 10 ensemble.

91 Commencer par diviser la classe en deux groupes quelconques. Si un élève a plus d'amis dans son groupe que dans l'autre, on le change de groupe. Que se passe-t-il ?

92 Marianne est tentée d'attendre quelques tirages en espérant qu'il y ait plus de cartes noires que de cartes rouges qui soient sorties. Il faut montrer que cette stratégie (comme n'importe quelle autre) ne change rien, et que Marianne aura toujours une chance sur deux de réussir sa prédiction. Pour cela, il faut commencer par bien formaliser ce qu'est une stratégie.

93 Il faut améliorer la position suivante :



94 Penser à écrire les résultats de chaque mois dans un tableau rectangulaire.

95 Numéroter les cases en base 2 (voir le rappel 7).

96 Munir les suites réelles de la relation d'équivalence suivante : deux suites sont équivalentes lorsqu'elles sont égales à partir d'un certain rang (voir le rappel 3). À un moment il faudra utiliser l'axiome du choix.

97 Utiliser la même relation d'équivalence que précédemment (voir le rappel 3).

98 Toujours avec la même relation d'équivalence (voir le rappel 3), mais c'est plus subtil. La résolution du problème plus simple suivant peut aider : avec seulement cent prisonniers et cent tiroirs contenant des entiers naturels, chaque prisonnier ne doit pas deviner mais seulement donner un majorant d'un entier d'un tiroir laissé fermé, toujours avec une erreur en plus.

99 On pourra considérer toutes les droites qui passent par au moins deux points de l'ensemble, puis raisonner par l'absurde en considérant le point étant à une distance minimale des droites qu'il ne touche pas.

100 On ne peut pas aller au-delà de la quatrième ligne. Trouver une configuration permettant d'atteindre la quatrième ligne n'a rien d'évident, et montrer qu'on ne peut pas atteindre la cinquième ligne est extrêmement difficile. Une façon astucieuse de procéder est d'assigner aux cases des puissances de ϕ, où ϕ est le nombre d'or moins 1 et vérifie donc $\phi^2 + \phi = 1$, comme ci-dessous :

ϕ^3	ϕ^2	ϕ^1	1	ϕ^1	ϕ^2	ϕ^3
ϕ^4	ϕ^3	ϕ^2	ϕ^1	ϕ^2	ϕ^3	ϕ^4
ϕ^5	ϕ^4	ϕ^3	ϕ^2	ϕ^3	ϕ^4	ϕ^5
ϕ^6	ϕ^5	ϕ^4	ϕ^3	ϕ^4	ϕ^5	ϕ^6
ϕ^7	ϕ^6	ϕ^5	ϕ^4	ϕ^5	ϕ^6	ϕ^7
ϕ^8	ϕ^7	ϕ^6	ϕ^5	ϕ^6	ϕ^7	ϕ^8
ϕ^9	ϕ^8	ϕ^7	ϕ^6	ϕ^7	ϕ^8	ϕ^9

On appelle énergie d'une configuration la somme des valeurs assignées aux cases où se trouvent les pions. On peut montrer que l'énergie ne peut que décroître et en déduire qu'il est impossible d'atteindre la case d'énergie 1.

Troisième partie

Solutions

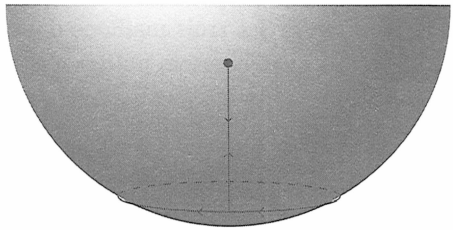
1 Il suffit au forgeron d'ouvrir les trois maillons d'une petite chaîne et de s'en servir pour relier les quatre autres petites chaînes entre elles.

2 Une fourmi met une minute à tomber dans le pire des cas. On se convainc facilement que deux fourmis mettent également une minute à tomber dans le pire des cas et qu'il en va de même pour trois fourmis. Et pour cinquante fourmis ? La réponse est toujours la même : une minute. Il suffit de remarquer que lorsque deux fourmis se rejoignent tout se passe comme si elles se croisaient en étant transparentes entre elles. Ainsi, qu'il y ait une fourmi ou cinquante fourmis cela ne change rien.

3 Le troisième a payé huit euros, puisqu'il s'agit d'un partage équitable entre trois personnes, l'ensemble des gâteaux vaut $8 \times 3 = 24$ euros. Un gâteau vaut donc $\frac{24}{8} = 3$ euros. Le premier a fait cinq gâteaux, il a donc dépensé l'équivalent de $5 \times 3 = 15$ euros et on doit lui rendre $15 - 8 = 7$ euros. Le second a fait trois gâteaux, soit 9 euros, on doit donc lui rendre 1 euro. Finalement, le troisième doit donner sept euros au premier et un euro au second.

4 La masse de ketchup dans l'assiette représente 99% de la masse totale frite plus ketchup qui est de 1 kg. On en déduit que la frite pèse 10 g et qu'il y a 990 g de ketchup. On a tendance à penser que si 990 g de ketchup représente 99% de la masse totale, alors 980 g va représenter 98% de la masse totale et qu'il suffit donc de retirer 10 g de ketchup. C'est faux car 980 g ne représente pas 98% de la masse totale : $\frac{980}{980+10} \simeq 98.99\% \neq 98\%$. Une fois que le ketchup en trop est retiré, la frite qui pèse toujours 10 g représente 2% de la masse totale. La masse totale est alors de 500 g car $\frac{10}{500} = 2\%$ et il reste 490 g de ketchup. Ainsi Jacques doit enlever 500 g de ketchup !

5 En marchant 1000 km vers le Sud, l'explorateur se retrouve sur un certain parallèle. Il va ensuite, en allant vers l'ouest, marcher suivant ce parallèle pendant 1000 km, avant de remonter vers le nord. S'il n'est pas parti du pôle Nord, il doit impérativement se retrouver sur le même point du parallèle avant de remonter. Par exemple, si ce parallèle a un périmètre de 1000 km, ça marche : tout point situé à 1000 km plus au nord de ce parallèle est un point de départ possible, car l'explorateur va descendre sur le parallèle, en faire le tour puis remonter, comme sur le schéma ci-dessous (non à l'échelle pour la lisibilité).



Est-ce la seule possibilité ? Non ! Le parallèle peut aussi avoir un périmètre de $\frac{1000\,\text{km}}{2}$, ou $\frac{1000\,\text{km}}{3}$, $\frac{1000\,\text{km}}{4}$, etc. On a ainsi tous les points de départ possibles :

— Le pôle Nord (c'est un cas à part).

— Les parallèles situés à 1000 km au nord des parallèles de périmètre $\frac{1000\,\text{km}}{n}$, où n est un entier naturel non nul.

6 Il suffit d'allumer la première liane aux deux extrémités et d'allumer en même temps la deuxième à une extrémité. La première liane va ainsi mettre deux minutes à brûler. Dès qu'elle a terminé de brûler on allume la deuxième extrémité de la deuxième liane qui va ainsi finir de brûler en une minute. Deux minutes et une minute, le compte est bon.

7 Yves sort une pilule A de sa boîte, la coupe en deux et en avale une moitié. Il fait ensuite de même avec les trois pilules qu'il a en main. Le lendemain il avale les quatre moitiés restantes.

8 On répond souvent 60 km/h, car 40 est la moyenne de 20 et de 60. Voyons pourquoi c'est faux. Soit d la distance entre la distance et la fac. À 20 km/h l'étudiant met un temps t_1 pour aller à la fac,

$$20\,\text{km/h} = \frac{d}{t_1} \text{ donc } t_1 = \frac{d}{20\,\text{km/h}}$$

Il effectue le retour en un temps

$$t_2 = \frac{d}{60\,\text{km/h}}$$

Le temps total de l'aller-retour est $t_1 + t_2$, la distance totale $2d$, donc sa vitesse moyenne est

$$v = \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2}{\frac{1}{20\,\text{km/h}} + \frac{1}{60\,\text{km/h}}} = 30\,\text{km/h}$$

et non pas 40 km/h.

En fait, il n'y a pas de solution à ce problème. Le seul moyen qu'a l'étudiant de doubler sa vitesse moyenne, c'est d'avoir une vitesse au retour infinie, c'est-à-dire de se téléporter ! En effet, s'il revient de façon instantanée, en posant t le temps mis à l'aller, son temps total pour l'aller-retour est t, et sa vitesse moyenne sur l'aller-retour est donc

$$v = \frac{2d}{t} = 2 \times 20\,\text{km/h} = 40\,\text{km/h}$$

En réalité, comme il ne se téléporte pas, sa vitesse moyenne sur l'aller-retour sera toujours strictement inférieure à 40 km/h.

9 La première difficulté est de bien poser le problème. Soit v la vitesse du bateau en absence de courant, lorsque la vitesse du courant est v_c, la vitesse du bateau est $v + v_c$ s'il va dans le sens du courant, $v - v_c$ sinon. Ensuite, il ne faut surtout pas faire la moyenne des deux vitesses et en conclure que le bateau prendra le même temps quelle que soit la vitesse du courant, c'est un raisonnement intuitif mais faux. Comme on l'a vu dans l'énigme précédente, la vitesse moyenne v_m sur l'aller-retour lorsqu'il y a un courant $v_c < v$ (sinon le bateau ne peut pas remonter le courant) est

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{v - v_c} + \frac{1}{v + v_c}}$$

$$v_m = \frac{v^2 - v_c^2}{v}$$

v_m est une fonction décroissante de v_c. S'il y a plus de courant que d'habitude, la vitesse moyenne sera plus petite et donc le temps total plus grand que d'habitude.

On peut retrouver rapidement ce résultat, mais sans vraiment le prouver, en raisonnant dans le cas extrême. Si la vitesse du courant est égale à celle du bateau, le bateau va faire l'aller deux fois plus vite mais ne pourra jamais faire le retour car il fera du surplace. Le temps total du trajet sera infini.

10 La proportion de garçons et de filles n'en sera pas modifiée. Les deux raisonnements faux suivants sont souvent entendus.

— Premier raisonnement faux : Il y aura plus de garçons car une famille qui veut un garçon a deux essais, alors qu'une famille voulant une fille doit avoir une fille du premier coup.

— Deuxième raisonnement faux : Il y aura plus de filles car le dernier enfant né a une chance sur deux d'être une fille, alors que l'avant-dernier enfant né est forcément une fille.

La meilleure façon de raisonner est de considérer le point de vue d'une sage-femme. Chaque enfant qu'elle fait naître a une chance sur deux d'être un garçon, et la proportion globale de garçons et de filles dans le pays n'est pas modifiée.

11 Autant et il n'y pas besoin de faire de calculs ! Les quantités totales de café et de lait ne varient pas au cours de l'opération, elles restent égales à 200 mL. Supposons par exemple qu'il y ait à la fin 197 mL de café et 3 mL de lait dans la tasse de café, alors il y a $200 - 3 = 197$ mL de lait et $200 - 197 = 3$ mL de café dans la tasse de lait.

12 Damien n'arrivera jamais à obtenir une tasse contenant autant de café que de lait. Supposons par l'absurde qu'il puisse obtenir un mélange 50/50. Intéressons-nous à la dernière opération rendant le mélange équilibré. Damien met une cuillère d'une première tasse dans la seconde puis une cuillère de la seconde tasse dans la première. Il obtient alors deux mélanges 50/50. La cuillère qui est allée de la première tasse à la seconde provenait donc d'un mélange 50/50 et elle a transformé la seconde tasse en un mélange 50/50. Nécessairement, la seconde tasse contenait déjà un mélange 50/50. C'est absurde car on a supposé qu'avant cette dernière étape nécessaire, Damien n'avait pas encore obtenu de mélange 50/50.

13 Il suffit de demander au garde de gauche en lui désignant sa porte : "Que me répondrait le garde de droite si je lui demandais si cette porte est la porte de l'enfer ?" Si le garde de droite ment il répondra oui si c'est la porte du paradis et non si c'est la porte de l'enfer et comme alors le garde de gauche dit la vérité il répondra à la question de la même manière : oui si c'est la porte du paradis et non si c'est la porte de l'enfer. Maintenant si le garde de droite dit la vérité il répondra non si c'est la porte du paradis et oui si c'est la porte de l'enfer mais comme alors le garde de gauche ment il répondra à la question de façon opposée : oui si c'est la porte du paradis et non si c'est la porte de l'enfer. On voit que

dans tous les cas le garde de gauche va répondre oui si c'est la porte du paradis et non sinon.

14 Pour k entre 1 et 10, notons n_k le nombre de façons de monter un escalier de k marches. On a $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, etc. On cherche n_{10}.

Soit k entre 3 et 10. Lorsqu'il monte un escalier de k marches, Toto peut au choix monter la première marche et dans ce cas il lui reste un escalier de $k-1$ marches à monter ou sauter la première marche et dans ce cas il lui reste un escalier de $k-2$ marches à monter. On obtient ainsi la relation suivante :

$$n_k = n_{k-1} + n_{k-2}$$

On reconnaît la célèbre suite de Fibonacci où chaque nouveau terme est la somme des deux termes précédents. Les premiers termes sont :

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89$$

donc $n_{10} = 89$. On peut aussi montrer que

$$n_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)$$

et retrouver la valeur de n_{10}.

15 Les trains sont au départ distants de 400 km et roulent à 200 km/h, ils roulent donc une heure avant de se rejoindre et la mouche vole une heure. Puisqu'elle vole à 400 km/h, elle parcourt exactement 400 km. On peut aussi se lancer dans le calcul d'une somme infinie mais c'est plus long et ça donne le même résultat.

16 La bonne question à se poser est : à quelle heure le petit garçon a-t-il croisé sa maman sur la route ? Sa maman a fait un trajet dix minutes plus court que d'habitude. Elle a donc fait demi-tour cinq minutes plus tôt que d'habitude, c'est-à-dire non plus à 16:00 mais à 15:55. Le petit garçon a donc marché 55 min.

17 Considérons le petit cube du milieu : il faudra nécessairement six coupes (une par face) pour le séparer des autres petits cubes. On aura beau redisposer les pièces, on ne pourra pas faire moins de six coupes.

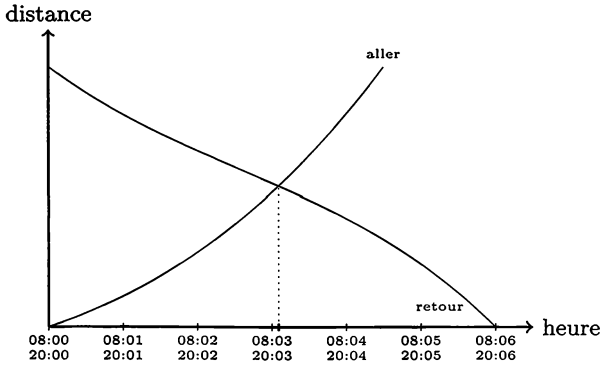
18 On remarque déjà qu'il suffit d'amener la somme à 89. En effet, l'adversaire, en donnant un entier entre 1 et 10, ne pourra que rendre la somme comprise entre 90 et 99, ce qui permettra de finir.

De même, si on amène la somme à 78, c'est gagné, car il est possible de la porter à 89, et, de là, à 100. On peut descendre de 11 à chaque fois : les sommes gagnantes (quand c'est à l'adversaire de jouer) sont 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1. Il suffit donc de commencer par 1 pour porter la somme à 12, puis à 23, ..., à 89 et enfin à 100.

19 L'astuce est de calculer combien de salons les trois peintres peuvent peindre ensemble en $2 \times 3 \times 5 = 30$ heures, ou ce qui revient au même, combien de fois ils peuvent peindre ensemble le même salon en 30 heures. En 30 heures, le premier peindra $\frac{30}{2} = 15$ fois le salon, le deuxième $\frac{30}{3} = 10$ fois le salon et le troisième $\frac{30}{5} = 6$ fois. En tout, ils peindront $15+10+6 = 31$ fois le salon en 30 heures. Il leur faut donc $\frac{30}{31}$ heure pour le peindre une seule fois, soit environ 58 minutes.

20 Raisonnons par l'absurde et supposons que chaque convive ait serré un nombre différent de mains. Notons n le nombre de convives. Le nombre de mains serrées pour chaque convive est compris entre 0 et $n-1$, ce qui fait n possibilités différentes. Comme on suppose que chaque convive a serré un nombre différent de mains, il y a donc un convive qui a serré 0 main, un convive qui a serré 1 main, un convive qui a serré 2 mains, ..., et un convive qui a serré $n-1$ mains. Or si un convive a serré $n-1$ mains c'est qu'il a serré la main à tout le monde, ce n'est pas possible que dans le même temps un convive n'ait serré aucune main : contradiction. Il y a donc forcément au moins deux convives qui ont serré le même nombre de mains.

21 On peut se convaincre graphiquement du résultat en traçant la distance du cadre à sa maison en fonction de l'heure, comme ci-dessous :



Il est clair qu'il existe au moins un point d'intersection entre les deux courbes, et l'heure associée à ce point répond au problème. Dans l'exemple ci-dessus, le cadre passe au même endroit que 12 h plus tôt à 20:03 et quelques secondes.

Si l'on veut une démonstration parfaitement rigoureuse, on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour bien justifier l'existence d'un point d'intersection...

22 Il suffit de placer la première pièce au centre de la table et de jouer ensuite symétriquement (symétrie centrale).

23 Soit p la probabilité que deux élèves aient leur anniversaire le même jour. Le plus simple pour calculer p est de calculer $1-p$, la probabilité que tous les élèves aient leur anniversaire des jours différents. Pour cela, on va compter le nombre de cas où tous les élèves ont leur anniversaire des jours différents, puis diviser par le nombre total de cas. Le nombre total de cas est 365^{23}. Le nombre de cas où les élèves ont leur anniversaire des jours différents est $365 \times (365-1) \times \cdots \times (365-22)$. En effet, il y a 365 possibilités pour le jour de l'anniversaire du premier, $365-1$ pour le jour du deuxième car il doit être différent de celui du premier, et ainsi de suite. On a donc

$$1-p = \frac{365 \times (365-1) \times \cdots \times (365-22)}{365^{23}}$$

$$p = 1 - \frac{365!}{(365-23)! \times 365^{23}}$$

Numériquement, $p \simeq 0.51$. Contre toute attente, il y a donc plus d'une chance sur deux que deux personnes aient leur anniversaire le même jour !

Pour n élèves, avec $n \leq 365$, la probabilité que deux élèves aient leur anniversaire le même jour est

$$p_n = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \times 365^n}$$

On note que p_n tend rapidement vers 1. Par exemple, $p_{50} \simeq 0.97$ et $p_{80} \simeq 0.9999$.

24

— Avec un serpent : le serpent mange la souris tranquillement.
— Avec deux serpents : chaque serpent sait que s'il mange la souris, l'autre serpent pourra le manger (restant seul, il ne risque rien). Ainsi il ne se passe rien, les deux serpents restent à se regarder sans pouvoir manger la souris.
— Avec trois serpents : on a vu qu'avec deux serpents il ne se passait rien. Le plus rapide se jette sur la souris et laisse les deux autres serpents se regarder. Il sait qu'il ne se fera pas manger.

On continue facilement le raisonnement : à quatre serpents rien ne se passe car si un serpent mange la souris on est ramené au cas des trois serpents et il se fait manger. À cinq serpents le plus rapide mange la souris, à six serpents rien ne se passe et ainsi de suite. On conclut par récurrence : à quinze serpents le plus rapide mange la souris.

25 Il s'agit de calculer une probabilité conditionnelle : probabilité qu'un individu soit malade, sachant que le test est positif. On va donc utiliser la formule de Bayes (voir le rappel 8). Posons d'abord les notations : M pour malade, S pour sain, P pour positif. D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(M|P) = \frac{\mathbb{P}(P|M) \times \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)}$$

Comme tout individu est soit M soit S, $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P \text{ et } M) + \mathbb{P}(P \text{ et } S)$

$$\mathbb{P}(M|P) = \frac{\mathbb{P}(P|M) \times \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P|M) \times \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P|S) \times \mathbb{P}(S)}$$

$$\mathbb{P}(M|P) = \frac{0.99 \times 0.001}{0.99 \times 0.001 + 0.01 \times (1 - 0.001)}$$

On obtient $\mathbb{P}(M|P) \simeq 9\%$

En dépit de la fiabilité apparente du test, un individu dépisté positif a donc moins d'une chance sur dix d'être malade !

26 Voici les résultats complets de l'étude :

	Traitement A	Traitement B
Petits calculs	93% (81/87)	87% (234/270)
Gros calculs	73% (192/263)	69% (55/80)
Total	78% (273/350)	83% (289/350)

Le traitement A a un taux de succès de 93% pour les petits calculs et de 73% pour les gros calculs. Son taux de succès total est de 78%. Le traitement B a un taux de succès inférieur pour les petits et les gros calculs, mais au final il a un taux de succès total supérieur !

Ce phénomène peut s'expliquer de la manière suivante : un pourcentage moyen ne se calcule pas comme la moyenne des pourcentages mais dépend d'une certaine pondération. Par exemple, le taux de succès total du traitement A ne se calcule pas en faisant la moyenne entre 93% et 73% :

$$\frac{93\% + 73\%}{2} = 83\% \neq 78\%$$

Il faut prendre en compte le fait que le 73% a plus de "poids" que le 93% car il est calculé avec plus de personnes. En reprenant les notations N_1^A et N_2^A de l'énoncé (ici $N_1^A = 87$ et $N_2^A = 263$), le pourcentage moyen se calcule de la manière suivante :

$$\frac{N_1^A \times 93\% + N_2^A \times 73\%}{N_1^A + N_2^A} = \frac{81 + 192}{87 + 263} = 78\%$$

Ainsi, le pourcentage moyen est situé entre les deux pourcentages, mais pas forcément au milieu. Il peut être très proche de l'un des deux si le nombre de personnes prises en compte dans chacun des cas (petits et gros calculs) est très différent. Le pourcentage moyen du traitement A est entre 93% et 73%, mais avec plus de poids sur le 73%, il termine à 78%. Le pourcentage moyen du traitement B est entre 87% et 69%, mais avec plus de poids sur le 87%, il termine à 83%.

Voici un autre exemple pour bien comprendre le phénomène. On considère quatre urnes, les urnes 1, 2, 3, 4. Chaque urne contient des boules noires et des boules blanches. Les urnes 1 et 3 sont de type A, les urnes 2 et 4 sont de type B. Dans l'urne 1 il y a, en pourcentage, plus de boules noires que dans l'urne 2 (100% contre 99%). Dans l'urne 3, il y a, en pourcentage, plus de boules noires que dans l'urne 4 (1% contre 0%). Ainsi,

les urnes de type A contiennent toujours plus, en pourcentage, de boules noires que les urnes de type B. Pourtant, au total, il y a plus de boules noires (en pourcentage) dans les urnes de type B que dans les urnes de type A :

	Type A	Type B
Urnes 1 et 2	100% (1/1)	99% (99/100)
Urnes 3 et 4	1% (1/100)	0% (0/1)
Total	2% (2/101)	98% (99/101)

27 À chaque lancer, le basketteur augmente son taux de réussite s'il réussit et le diminue sinon. Ce taux est de 0% après le premier lancer mais il va remonter jusqu'à 80%. À un moment, disons du $(n-1)$-ième au n-ième lancer avec $n > 1$, le basketteur va donc passer d'un taux strictement inférieur à 75% à un taux supérieur ou égal à 75%. Soit p le nombre de lancers réussis au n-ième lancer. Au lancer précédent, le basketteur avait un taux de réussite inférieur, il n'avait donc que $p-1$ lancers réussis.

Par hypothèse,

$$\frac{p-1}{n-1} < \frac{3}{4} = 75\% \text{ et } \frac{p}{n} \geq \frac{3}{4} = 75\%$$

Cela implique

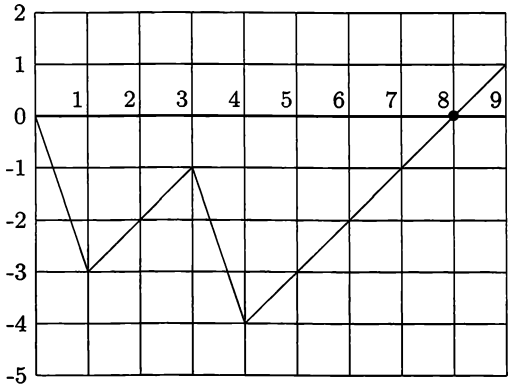
$$4(p-1) < 3(n-1) \text{ et } 4p \geq 3n$$

On a donc

$$0 \leq 4p - 3n < 1$$

Or $4p - 3n$ est un entier donc $4p - 3n = 0$ et au n-ième lancer, le basketteur a exactement 75% de réussite.

Il existe une autre preuve plus graphique : on dessine la suite définie par récurrence valant 0 en 0 et augmentant de 1 quand le basketteur réussit un lancer, décroissant de 3 sinon. Par exemple, on obtient le graphe ci-dessous si le basketteur a raté le premier et le quatrième lancer.



À la fin la suite devient positive car le basketteur termine à un taux de réussite supérieur à 75%. Au moment où la suite s'annule (ici en 8), le taux de réussite est de 75%. En effet il y a alors trois fois plus de lancers réussis que de lancers ratés.

28 Procédons dans l'ordre. On sait pour commencer que le produit des âges fait 36. Écrivons tous les produits possibles :

$$
\begin{aligned}
1 \times 1 \times 36 &= 36 \\
1 \times 2 \times 18 &= 36 \\
1 \times 3 \times 12 &= 36 \\
1 \times 4 \times 9 &= 36 \\
1 \times 6 \times 6 &= 36 \\
2 \times 2 \times 9 &= 36 \\
2 \times 3 \times 6 &= 36 \\
3 \times 3 \times 4 &= 36
\end{aligned}
$$

Pour chaque produit, calculons la somme des âges :

$$
\begin{aligned}
1 \times 1 \times 36 &= 36 \quad & 1 + 1 + 36 &= 38 \\
1 \times 2 \times 18 &= 36 \quad & 1 + 2 + 18 &= 21 \\
1 \times 3 \times 12 &= 36 \quad & 1 + 3 + 12 &= 16 \\
1 \times 4 \times 9 &= 36 \quad & 1 + 4 + 9 &= 14 \\
1 \times 6 \times 6 &= 36 \quad & 1 + 6 + 6 &= 13 \\
2 \times 2 \times 9 &= 36 \quad & 2 + 2 + 9 &= 13 \\
2 \times 3 \times 6 &= 36 \quad & 2 + 3 + 6 &= 11 \\
3 \times 3 \times 4 &= 36 \quad & 3 + 3 + 4 &= 10
\end{aligned}
$$

On constate qu'il n'y a que deux produits qui donnent la même somme. Or le facteur n'a pas su conclure sachant la somme des âges.

C'est donc que le numéro de la maison d'en face est 13, le facteur hésitait entre $(1,6,6)$ et $(2,2,9)$. Il y a une ainée donc les enfants ont respectivement 2 ans, 2 ans et 9 ans.

29 Une solution possible :

30 Curieuse question ! On pourrait en effet penser qu'il ne va rien se passer puisque tout le monde sait déjà qu'il existe au moins une femme infidèle. Chaque mari trompé connaît quarante-neuf autres cocus, tous les autres habitants en connaissent cinquante. Pourtant il va bien se passer quelque chose, voyons pourquoi.

Imaginons qu'il n'y ait que deux femmes infidèles au lieu de cinquante. Mettons-nous dans la peau d'un cocu : je suis cocu mais je ne le sais pas. Je ne connais qu'un seul cocu. Lorsque je découvre le message sur le mur je me dis que le seul cocu que je connais va apprendre qu'il est cocu en lisant ce message et va rompre avec sa femme le soir même. Manque de chance je me rends compte le lendemain qu'il ne l'a pas fait. J'en conclus qu'il n'y a pas qu'un seul cocu, il y en a deux : celui que je connais et... moi ! Fort de cette certitude logique je romps le soir même. L'autre cocu suit le même raisonnement et agit de la même manière. Ainsi, lorsqu'il y a deux femmes infidèles et donc deux cocus, ils mettent tous les deux fin à leur couple le deuxième soir.

Que se passe-t-il maintenant s'il y a trois femmes infidèles ? Encore une fois on se place dans la peau d'un cocu. On connaît deux cocus et on se dit qu'ils vont se séparer de leur femme le deuxième soir. Or il ne se passe

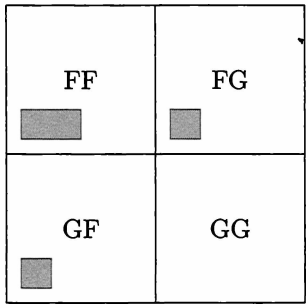
rien le deuxième soir, on met donc fin à notre couple le troisième soir. On montre ainsi, par récurrence, qu'il ne se passe rien pendant quarante-neuf jours et que le cinquantième soir tous les cocus rompent en même temps !

31 La probabilité, pour un couple ayant au moins une fille, d'avoir aussi un garçon est $\frac{2}{3}$. En effet, les couples ayant deux enfants sont divisés en quatre catégories équiprobables (on note F pour fille et G pour garçon) :

FF (ainé F, cadet F)	FG (ainé F, cadet G)
GF (ainé G, cadet F)	GG (ainé G, cadet G)

Les couples ayant au moins une fille sont ceux qui ont FF, FG ou GF. Parmi ces couples, les deux tiers (ceux ayant FG ou GF) ont un garçon : la probabilité recherchée est bien $\frac{2}{3}$.

On demande maintenant au couple s'il a une fille s'appelant Sophie. S'il répond "oui", la probabilité qu'il ait un garçon est la probabilité qu'il ait un garçon sachant qu'il a un enfant s'appelant Sophie (voir rappel 8). Pour calculer cette probabilité conditionnelle, représentons en gris, dans la population des couples à deux enfants schématisée ci-dessus, ceux qui ont au moins un enfant s'appelant Sophie. Il y en a une petite proportion dans le carré FG, autant dans GF, et environ deux fois plus dans FF :



Comme il y a autant de gris dans FF que dans les deux autres cas réunis (FG et GF), sachant qu'il y a une Sophie il y a autant de chance qu'il y ait deux filles qu'un garçon et une fille : la probabilité recherchée est donc environ $\frac{1}{2}$. Calculons-la plus précisément. Notons S l'événement "au moins un enfant s'appelle Sophie", G l'événement "au moins un enfant est un garçon". Commençons par calculer $\mathbb{P}(\mathrm{FF}|\mathrm{S})$.

$$\mathbb{P}(\mathrm{FF}|\mathrm{S}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{S}|\mathrm{FF}) \times \mathbb{P}(\mathrm{FF})}{\mathbb{P}(\mathrm{S})}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{FF}|\mathrm{S}) = \frac{(1 - \mathbb{P}(\text{non S}|\mathrm{FF})) \times \mathbb{P}(\mathrm{FF})}{\mathbb{P}(\mathrm{S}|\mathrm{FF}) \times \mathbb{P}(\mathrm{FF}) + \mathbb{P}(\mathrm{S}|\mathrm{FG \text{ ou } GF}) \times \mathbb{P}(\mathrm{FG \text{ ou } GF})}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{FF}|\mathrm{S}) = \frac{\left(1 - (1-\epsilon)^2\right) \times \frac{1}{4}}{\left(1 - (1-\epsilon)^2\right) \times \frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2}} = \frac{2\epsilon - \epsilon^2}{4\epsilon - \epsilon^2}$$

comme $\mathbb{P}(\mathrm{G}|\mathrm{S}) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{FF}|\mathrm{S})$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{G}|\mathrm{S}) = \frac{1}{2 - \frac{\epsilon}{2}}$$

ce qui est bien environ égal à $\frac{1}{2}$ pour ϵ petit. Il est rassurant de constater que dans le cas où toutes les filles s'appellent Sophie, c'est-à-dire quand $\epsilon = 1$, on retrouve $\frac{2}{3}$.

Passons au troisième cas. Le couple a répondu "oui" quand on lui a demandé s'il avait au moins une fille. On en déduit qu'il a la probabilité $\frac{2}{3}$ d'avoir un garçon. Il précise maintenant qu'il a au moins une fille qui s'appelle Sophie. Maintenant que l'on sait qu'une fille s'appelle Sophie, on serait tenté de dire que la probabilité que le couple ait un garçon n'est plus $\frac{2}{3}$ mais $\mathbb{P}(\mathrm{G}|\mathrm{S})$. Ce raisonnement s'applique quel que soit le prénom annoncé car tous les prénoms ont par hypothèse la même probabilité d'être donnés à la naissance : par exemple, si le couple annonce avoir au moins un enfant s'appelant Laure, la probabilité passe aussi de $\frac{2}{3}$ à $\mathbb{P}(\mathrm{G}|\mathrm{Laure}) = \mathbb{P}(\mathrm{G}|\mathrm{S})$. Ainsi, la probabilité passe systématiquement, quoi que le couple dise, de $\frac{2}{3}$ à $\mathbb{P}(\mathrm{G}|\mathrm{S})$, c'est absurde ! En fait, avoir l'information qu'un enfant s'appelle Sophie ne suffit pas à conclure que la probabilité qu'il y ait un garçon est $\mathbb{P}(\mathrm{G}|\mathrm{S})$, tout dépend de comment on a obtenu l'information.

Prenons un exemple plus simple pour s'en convaincre. Supposons qu'il y ait trois cartes portant respectivement les inscriptions a, b et c, faces

cachées sur une table. Le jeu consiste simplement à choisir une des trois cartes (face cachée). Soit A l'événement "la carte choisie est la carte a", on a évidemment $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$. Considérons le groupe 1 formé des cartes a et b et le groupe 2 formé des cartes a et c, et notons G_1 (respectivement G_2) l'événement "la carte choisie appartient au groupe 1 (respectivement 2)". On a donc

$$\mathbb{P}(A|G_1) = \mathbb{P}(A|G_2) = \frac{1}{2}$$

On choisit une carte face cachée et on la met de côté, on sait qu'on a une chance sur trois que ce soit la carte a. Si l'on demande à un ami qui peut voir la carte choisie de nous dire un groupe auquel elle appartient, quoi qu'il nous réponde (groupe 1 ou groupe 2), à en croire les probabilités conditionnelles, la probabilité que la carte choisie soit la carte a passerait systématiquement de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{2}$: c'est absurde ! Ainsi, il ne suffit pas qu'on nous dise "la carte choisie est dans le groupe 1" pour qu'on puisse conclure que la probabilité que ce soit la carte a passe de $\mathbb{P}(A)$ à $\mathbb{P}(A|G_1)$. Le problème vient du fait que lorsque l'on soustrait l'information de façon "forcée", en supposant que l'ami tire à pile ou face pour choisir le groupe lorsque la carte choisie est la carte a, il ne nous dit pas tout le temps quand la carte choisie est dans le groupe 1. Ainsi, les cartes dites du groupe 1 par l'ami ne sont pas représentatives du groupe 1. Quand une carte est annoncée "du groupe 1", elle a en fait deux fois plus de chances d'être c que a. Ce n'est pas pareil que de prendre une carte du groupe 1 au hasard, auquel cas il y a autant de chance qu'elle soit c que a.

Néanmoins, si au lieu de demander à l'ami voyant la carte de nous donner un groupe auquel elle appartient on lui demande s'il elle appartient au groupe 1, quand il répond "oui" la probabilité passe bien de $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$ à $\mathbb{P}(A|G_1) = \frac{1}{2}$ car il répond "oui" si et seulement si la carte appartient au groupe 1.

Le cas des prénoms est très similaire, quand le couple a deux filles, il lui faut choisir un prénom à annoncer (de même que l'ami choisit un groupe lorsque la carte choisie est a). Ainsi, si l'on suppose que lorsqu'on demande à un couple de nous donner un prénom féminin qu'il a donné à un de ses enfants, il répond en tirant à pile ou face s'il a le choix, la probabilité que ce couple ait un garçon reste $\frac{2}{3}$. En revanche, si l'on suppose qu'un couple cherche toujours à annoncer comme prénom Sophie si c'est possible, la probabilité passera bien de $\frac{2}{3}$ à $\mathbb{P}(G|S)$. En effet, si l'on interroge un grand nombre de couples, ceux qui répondent Sophie à la demande de précision étant exactement ceux qui ont au moins un enfant qui s'appelle Sophie, il y en a une proportion $\mathbb{P}(G|S)$ qui a un garçon.

32 À première vue, il n'y a aucune raison de changer... Cependant, en privilégiant une porte où il n'y a pas la voiture, le présentateur donne une indication sur l'emplacement de la voiture.

Numérotons les portes de 1 à 3, la porte 1 étant celle choisie. Il y a trois cas : soit la voiture est derrière la porte 1, soit elle est derrière la porte 2, soit elle est derrière la porte 3.

— Si elle est en 1, il ne faut bien entendu pas changer de porte.
— Si elle est en 2, le présentateur a ouvert la porte 3, et il reste la porte 2 : il faut changer de porte
— Si elle est en 3, le présentateur a ouvert la porte 2, et il reste la porte 3 : il faut changer de porte

En moyenne, changer de porte permet de gagner la voiture deux fois sur trois, il faut donc changer de porte. Le candidat du show qui, ayant joué trop rapidement, n'a pas changé de porte, s'est donc privé de l'opportunité de doubler sa probabilité de gagner.

On peut aussi montrer ce résultat en utilisant la formule de Bayes (voir le rappel 8). Notons V (comme voiture) l'événement "être sur la voiture au début", $\overline{V}$ son contraire : "ne pas être sur la voiture au début" et G (comme gain) l'événement "être sur la voiture à la fin". On cherche la probabilité de gagner la voiture $\mathbb{P}(G)$.

Avec la stratégie qui consiste à ne pas changer de porte, $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{3}$.

Avec la stratégie qui consiste à changer de porte, on conditionne par rapport aux événements V et $\overline{V}$:

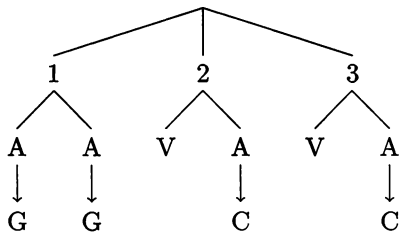
$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(G|V) \times \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}\left(G|\overline{V}\right) \times \mathbb{P}\left(\overline{V}\right)$$

Or $\mathbb{P}(G|V) = 0$ car si on est sur la voiture et qu'on change de porte, on n'est plus sur la voiture. Par contre, si on n'est pas sur la voiture et qu'on change de porte, on obtient toujours la voiture donc $\mathbb{P}\left(G|\overline{V}\right) = 1$. Finalement, on a

$$\mathbb{P}(G) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

En revanche, lorsque le présentateur a ouvert une porte derrière laquelle il n'y a pas la voiture par hasard, sans avoir fait exprès de garder le suspens, changer de porte n'augmente pas la probabilité de gagner.

Pour s'en convaincre, une première approche est de faire un arbre comme ci-dessous :



La première ligne est le numéro de la porte que l'on a choisi, la porte numéro 1 étant celle derrière laquelle se cache la voiture. La deuxième ligne correspond à ce que dévoile le présentateur : A pour autre, V pour voiture. Si c'est V qui est dévoilé il n'y a pas de question, sinon la troisième ligne indique le choix à faire en conséquence : G pour garder, C pour changer de porte. Comme il y a autant de G que de C, on peut se dire que les stratégies sont bien équivalentes. Ce raisonnement doit toutefois être rendu rigoureux, pour cela appliquons la formule de Bayes.

Soit S (comme suspens) l'événement "le présentateur ne dévoile pas la voiture" et $\overline{S}$ son complémentaire : "le présentateur dévoile la voiture". En supposant que le présentateur n'a pas dévoilé la voiture, on ne calcule plus $\mathbb{P}(G)$ mais $\mathbb{P}(G|S)$. On a

$$\mathbb{P}(G|S) = \frac{\mathbb{P}(G \text{ et } S)}{\mathbb{P}(S)}$$

On peut calculer $\mathbb{P}(S)$, même si ce n'est pas nécessaire, en conditionnant par rapport aux événements V et $\overline{V}$:

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S|V) \times \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}\left(S|\overline{V}\right) \times \mathbb{P}\left(\overline{V}\right)$$

$\mathbb{P}(S|V) = 1$ (si on est sur la voiture le présentateur ne la dévoile pas) et $\mathbb{P}\left(S|\overline{V}\right) = \frac{1}{2}$ (si on n'est pas sur la voiture le présentateur a une chance sur deux de la dévoiler), ainsi $\mathbb{P}(S) = 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Il reste maintenant à calculer $\mathbb{P}(G \text{ et } S)$ pour connaître $\mathbb{P}(G|S)$. On a

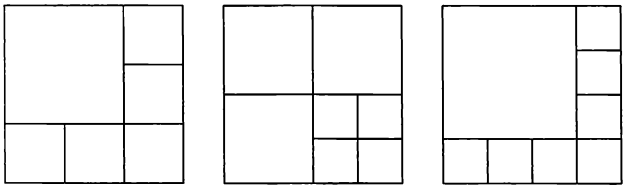
$$\mathbb{P}(G \text{ et } S) = \mathbb{P}(G \text{ et } S|V) \times \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}\left(G \text{ et } S|\overline{V}\right) \times \mathbb{P}\left(\overline{V}\right)$$

Avec la stratégie qui consiste à ne pas changer de porte, $\mathbb{P}(G \text{ et } S|V) = 1$ et $\mathbb{P}\left(G \text{ et } S|\overline{V}\right) = 0$ donc $\mathbb{P}(G \text{ et } S) = 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Ainsi $\mathbb{P}(G|S) = \frac{1}{2}$.

Avec la stratégie qui consiste à changer de porte, on a $\mathbb{P}(G \text{ et } S|V) = 0$ et $\mathbb{P}\left(G \text{ et } S|\overline{V}\right) = \frac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(G \text{ et } S) = 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Ainsi $\mathbb{P}(G|S) = \frac{1}{2}$.

Les deux stratégies conduisent à la même probabilité de gagner.

33 Il est clair que 2 carrés ne peuvent pas former un carré (à moins d'empiler les pièces mais c'est interdit) donc 2 est un nombre impossible. 3 est impossible également. 4 est facile : avec quatre carrés de la même taille on peut former un grand carré. Enfin on se convainc facilement que 5 est impossible. Tous les autres nombres sont possibles. On peut faire 6, 7 et 8 :



6 7 8

De plus on remarque que si on sait faire n alors on sait faire $n+3$. Il suffit en effet de couper n'importe quel carré en quatre pour passer de n à $n+3$. Ainsi on peut faire $9 = 6+3$, $10 = 7+3$, $11 = 8+3$, et ainsi de suite en allant de 3 en 3.

34 Le bon doit faire exprès de manquer son coup. Pour s'en convaincre, examinons successivement les cas où il tire sur la brute, où il tire sur le truand et enfin où il tire exprès à côté.

Le bon tire sur la brute Cette stratégie est manifestement mauvaise, puisque s'il réussit son coup il se retrouve face au truand ce qui entraîne sa mort certaine, s'il rate, il a la même probabilité de survivre qu'en ayant fait exprès de rater. Il a donc une probabilité de survie strictement inférieure à celle obtenue en faisant exprès de manquer son coup.

Le bon tire sur le truand C'est la stratégie la plus intuitive : commencer par éliminer l'adversaire le plus dangereux. Calculons la probabilité p que le bon gagne s'il se retrouve en duel face à la brute, avec la brute qui tire en premier. Soit q la probabilité que le bon gagne si c'est à lui de tirer face à la brute. $p = \frac{1}{2}q$ car soit la brute tue le bon, soit elle lui donne une probabilité q de gagner. $q = \frac{2}{3}p + \frac{1}{3}$ car le bon a une chance sur trois de tuer la brute et deux chances sur trois de se retrouver dans la situation où la brute tire en premier. Cela donne $p = \frac{1}{4}$. Cette stratégie n'est intéressante que si p est supérieure à la probabilité que le bon gagne s'il tire en l'air, qu'il nous faut maintenant calculer.

Le bon rate exprès son coup Le bon choisit de rater systématiquement son coup, jusqu'à ce qu'il se retrouve contre un seul adversaire. La brute et le truand n'ont tous les deux aucun intérêt à tirer sur le bon, car pour la brute c'est du suicide et pour le truand cela lui donnerait une probabilité de gagner de $\frac{1}{2}$ alors qu'il peut avoir $\frac{2}{3}$ en tirant sur la brute. Tout se passe donc comme si ce n'était un duel qu'entre la brute et le truand, le vainqueur affrontant le bon. Pour gagner ce duel, la brute va tirer sur le truand. Soit elle l'atteint et le bon se retrouve contre elle avec la probabilité q de gagner, soit elle manque son coup et le bon se retrouve contre le truand. Dans ce cas-là, le bon n'a pas le droit à l'erreur, et n'a qu'une chance sur trois de gagner. Finalement, la probabilité de gagner du bon avec cette stratégie est $p' = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$. Comme $p' > p$, cette stratégie est la meilleure.

35 Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que s'il y a n stations-service, avec juste assez d'essence en tout pour faire un tour, il existe une station d'où peut partir une voiture pour faire un tour.

Avec une seule station-service, qui contient juste ce qu'il faut pour faire un tour, une voiture partant de cette station peut faire un tour.

Supposons le résultat vrai avec n stations-service. Montrons qu'il est vrai avec $n+1$ stations. On remarque qu'il existe une station qui contient assez d'essence pour le trajet jusqu'à la suivante. En effet, si aucune station ne contenait assez d'essence pour aller jusqu'à la suivante, les stations ne contiendraient pas en tout assez d'essence pour faire un tour. Une station contenant assez d'essence pour atteindre la suivante peut être remplacée fictivement par une station contenant l'essence de ces deux stations réunies. Par hypothèse de récurrence, il existe une station d'où peut partir la voiture pour faire un tour.

Il existe une démonstration moins intuitive mais directe de ce résultat. Considérons une voiture ayant un grand réservoir et suffisamment d'essence qui fait un tour en s'approvisionnant à toutes les stations. Après ce tour, elle a autant d'essence qu'au départ. Il existe une station où son niveau d'essence était minimal, et on constate que cette station convient comme point de départ pour une voiture sans essence.

36 Remarquons pour commencer que le fait que l'étudiant voit ou non le résultat de sa prédiction avant de deviner la couleur de la carte suivante ne change rien au problème. En effet, puisqu'il vise un sans-faute, il peut toujours supposer que la carte est de la couleur de sa prédiction : de toute façon si ce n'est pas le cas il a perdu.

Globalement, il doit deviner la répartition exacte des cartes rouges dans le paquet. On peut se demander combien il y a de répartitions possibles. La réponse est 26 parmi 52 (voir le rappel 2), ce qui fait $\frac{52!}{26!\times 26!}$. Toutes ces répartitions sont équiprobables. Par exemple, la répartition où il y a seulement des cartes rouges puis seulement des cartes noires se produira dans $26! \times 26!$ cas car il y a 26! façons d'arranger les 26 cartes rouges et 26! façons d'arranger les 26 cartes noires. De la même manière, n'importe quelle répartition (par exemple, une carte rouge, une carte noire, une carte rouge, etc.) se produira dans $26! \times 26!$ cas. Ainsi, puisque toutes ces répartitions sont équiprobables, il a une chance sur $\frac{52!}{26!\times 26!}$ de réussir le jeu proposé avec par exemple comme stratégie d'annoncer rouge les 26 premières fois puis noir les 26 suivantes sans même regarder les cartes que son camarade lui montre !

37 On commence par faire une pesée 4/4 : les poids 1, 2, 3, 4 à gauche et les poids 5, 6, 7, 8 à droite. S'il y a égalité, on sait alors que tous ces poids ont une masse standard et que le poids différent se trouve parmi les poids 9, 10, 11, 12. On fait ensuite une pesée 3/3 : les poids 1, 2, 3 à gauche et les poids 9, 10, 11 à droite. S'il y a de nouveau égalité, on en déduit que les poids 9, 10, 11 ont une masse standard et que le poids 12 est différent. Il reste à le peser contre un poids standard pour savoir s'il est plus lourd ou plus léger. S'il n'y a pas égalité, par exemple si la balance penche à gauche (l'autre cas est symétrique), on en déduit que le poids différent se trouve parmi les poids 9, 10, 11 et qu'il est plus léger. On conclut facilement avec une dernière pesée.

Revenons à notre première pesée, si maintenant il n'y a pas égalité, par exemple si la balance penche à gauche (l'autre cas est symétrique), on en déduit que le poids différent se trouve parmi les poids 1, 2, 3, 4 et que dans ce cas il est plus lourd, ou parmi les poids 5, 6, 7, 8 et que dans ce cas il est plus léger ; et que les poids 9, 10, 11, 12 ont une masse standard.

On fait une pesée 3/3 : les poids 1, 2, 7 à gauche et les poids 3, 4, 9 à droite. S'il y a égalité, on en déduit que tous ces poids ont une masse standard et que le poids différent est soit le poids 5, soit le poids 6, soit le poids 8 et on conclut en pesant le poids 5 contre le poids 6. Si la balance penche à gauche, le poids différent est soit le poids 1, soit le poids 2 et on conclut facilement avec une dernière pesée. Enfin, si la balance penche du côté droit, le poids différent est soit le poids 3, soit le poids 4, soit le poids 7 et on conclut en pesant le poids 3 contre le poids 4.

Notons que la recherche d'une telle solution est facilitée par l'utilisation du principe de comparaison résultats/solutions (voir le rappel 1). Par exemple, ce principe permet d'éliminer directement la possibilité d'une première pesée 3/3 : en cas d'égalité, il resterait 12 solutions (6 poids) et seulement 9 résultats possibles (deux pesées).

38 On commence par séparer les pièces en un groupe de 25 pièces et un groupe de 75 pièces. Parmi le groupe de 75 pièces il y a un certain nombre n de faces. On ne connaît pas n, on sait simplement que n est compris entre 0 et 25. Dans le groupe de 25 pièces il y a donc $25-n$ faces puisque le nombre total de faces est 25. Maintenant on retourne toutes les pièces du groupe de 25 pièces. Ainsi on change les faces en piles et les piles en faces. À la fin de l'opération il y a, dans le groupe de 25 pièces, n faces et $25-n$ piles. Le problème est résolu.

39 Qu'il y ait deux ou sept couleurs, il est possible de sauver à coup sûr 99 prisonniers. Cela est optimal car le prisonnier du haut de l'escalier ne peut pas être sauvé à coup sûr, puisqu'il n'a aucune information lui permettant de trouver la couleur de son chapeau.

L'idée est de rendre la réponse du premier utile aux autres. Il peut compter les chapeaux noirs qu'il aperçoit et dire "blanc" s'il y en a un nombre pair, "noir" sinon. À partir de là, tous les prisonniers vont trouver la couleur de leur chapeau. En effet, supposons par exemple que le premier prisonnier ait dit "blanc" (le deuxième cas est symétrique). Le prisonnier suivant (celui sur la 99-ième marche) compte les chapeaux noirs qu'il aperçoit, s'il y en a un nombre pair, c'est que son chapeau est blanc, sinon, c'est que son chapeau est noir. Le prisonnier suivant, en tenant compte de la réponse du précédent, connaît la parité du nombre de chapeaux noirs des prisonniers sur les marches 1 à 98, donc peut répondre à son tour, et ainsi de suite jusqu'au prisonnier du bas.

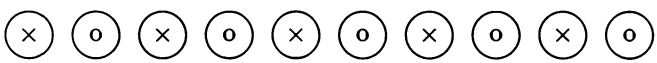
Et avec sept couleurs ? On peut numéroter les sept couleurs de 0 à 6. Le premier prisonnier interrogé calcule la somme des numéros des chapeaux qu'il aperçoit modulo 7 (voir le rappel 6) et répond par la couleur correspondante à ce numéro. Par exemple, si la somme vaut 50 il répond 1 car $50 \equiv 1\,[7]$. Le deuxième prisonnier calcule à son tour la somme des chapeaux qu'il voit et en déduit par différence le numéro de son chapeau. Par exemple, s'il calcule 48 et que le premier prisonnier a annoncé 1, il sait qu'il a 2 comme numéro car c'est le seul numéro entre 0 et 6 qui, ajouté à 48, donne un résultat congru à 1 modulo 7. Le troisième prisonnier connaît donc le numéro du deuxième et procède

de la même façon. Tous les prisonniers déduisent chacun à leur tour la couleur de leur chapeau.

On pourrait se demander ce qu'il se passe avec une infinité de couleurs. Pour que cela ait un sens, on peut assimiler les couleurs aux entiers : les prisonniers ont des chapeaux portant des entiers naturels quelconques. C'est facile, car le premier prisonnier peut donner beaucoup plus d'informations !

Il peut par exemple donner la somme de tous les chapeaux qu'il voit. Les autres prisonniers en déduisent à tour de rôle les numéros qu'ils portent. Le premier prisonnier peut même permettre à tous les autres de trouver en même temps la couleur de leur chapeau. Il suffit de trouver une injection de $\mathbb{N}^{99}$ dans $\mathbb{N}$. C'est possible, par exemple en s'appuyant sur l'unicité de la décomposition en facteurs premiers : soient $c_1, c_2, \ldots, c_{99}$ les numéros portés par les 99 prisonniers sur les marches 1 à 99 et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers, le prisonnier du haut peut annoncer $p_1^{c_1} \times \cdots \times p_{99}^{c_{99}}$.

40 On sépare les pièces en deux groupes, les croix et les ronds, comme suit :



On peut choisir de ramasser toutes les croix ou tous les ronds, il ne reste plus qu'à choisir le symbole qui rapporte le plus.

Dans l'exemple de l'énoncé, la somme des croix vaut $2+7+6+5+9 = 29$ et la somme des ronds vaut $4+1+10+8+3 = 26$. Il faut donc choisir les croix et commencer par prendre la pièce 2. Ensuite, si l'adversaire choisit la pièce 4 on prend la 7 et s'il prend la 3 on prend la 9, etc.

Notons aussi que la somme des valeurs des pièces vaut $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$ qui est impair donc la somme sur les croix ne peut pas être égale à la somme sur les ronds. Ainsi on est certain de pouvoir ramasser une somme strictement supérieure à celle du maître du jeu.

41 En fait on peut trouver deux points opposés où la température est la même sur n'importe quel méridien. Plaçons-nous sur un méridien quelconque. Considérons la fonction qui, à un point de ce méridien, associe la différence entre la température de ce point et celle du point opposé. Il s'agit de montrer que cette fonction, qui est continue, s'annule en un point. Quand on parcourt le méridien en allant du pôle Nord

au pôle Sud, la fonction change de signe (sa valeur au pôle Nord est l'opposé de celle au pôle Sud). Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe bien un point où elle s'annule.

Notons qu'il existe un résultat bien plus fort : il y a toujours deux points diamétralement opposés où la température et la pression sont les mêmes. C'est le théorème de Borsuk-Ulam en dimension deux. Ce théorème, démontré en 1933 par Karol Borsuk, assure que pour toute fonction continue d'une sphère de dimension n (c'est-à-dire d'une sphère de $\mathbb{R}^{n+1}$) dans $\mathbb{R}^n$ il existe deux points antipodaux ayant la même image par f. On a démontré ci-dessus ce théorème en dimension un.

42 Cela paraît impossible. Si toutes les chambres sont occupées, on voit mal comment on pourrait trouver de la place en redisposant les clients. Bien sûr, avec un hôtel fini c'est impossible. Cela se saurait ! Mais un hôtel infini possède des propriétés étranges. Voyons comment faire pour libérer une chambre.

Il suffit de demander à tous les clients de se décaler d'une chambre. Le client de la chambre 1 va dans la chambre 2, le client de la chambre 2 va dans la chambre 3 et ainsi de suite : le client de la chambre n va dans la chambre $n+1$. À la fin de ce déménagement, la chambre 1 est vidée, on a libéré une chambre !

Une fois qu'on a réussi à libérer une chambre, on se dit qu'il suffit de répéter cette opération une infinité de fois pour libérer une infinité de chambres, sauf que c'est impossible ! Raisonnons par l'absurde : si on parvenait à répéter cette opération une infinité de fois, toutes les chambres seraient vides et tous les clients auraient disparu. C'est absurde ! Il faut trouver une autre méthode...

Il suffit de demander au client de la chambre 1 d'aller dans la chambre 2, au client de la chambre 2 d'aller dans la chambre 4, au client de la chambre n d'aller dans la chambre $2n$. À la fin de ce déménagement, toutes les chambres ayant un numéro impair sont vidées et il ne reste plus qu'à y installer les nouveaux clients. Le nouveau client 1 ira dans la chambre 1, le nouveau client 2 ira dans la chambre 3, et ainsi de suite : le nouveau client n ira dans la chambre $2n-1$.

43 On constate que la dernière place libre ne peut être que celle du premier ou du centième passager, sinon elle aurait été prise. Les passagers, en s'installant, ne privilégient aucune des deux hypothèses : on pourrait échanger les numéros des places du premier et du dernier passager, cela ne modifierait pas l'embarquement des quatre-vingt-dix-huit

autres passagers. Le centième passager a donc une chance sur deux de trouver sa place libre.

44 Imaginons pour commencer qu'il n'y ait que deux pirates et qu'ils aient cent écus à se partager. Le plus âgé fait la première proposition : cent écus pour lui et rien pour l'autre. La répartition est forcément acceptée car seul le deuxième pirate peut s'opposer, il ne peut pas y avoir une majorité contre.

Passons maintenant au cas où il y a trois pirates et cent écus. Quelle que soit la répartition que le plus âgé va proposer, le second pirate y sera opposé. En effet si la répartition ne passe pas, il ne restera que deux pirates et il sera le plus âgé. Il proposera donc tout pour lui et rien pour l'autre et gagnera. Par contre, le troisième pirate a intérêt à accepter la répartition du plus âgé car il sait qu'il n'aura rien si elle ne passe pas. Ainsi, il suffit au pirate le plus âgé de proposer quatre-vingt-dix-neuf écus pour lui et un écu pour le troisième. Le troisième va accepter : un écu, c'est toujours mieux que rien. Le deuxième sera contre, mais la répartition passera tout de même.

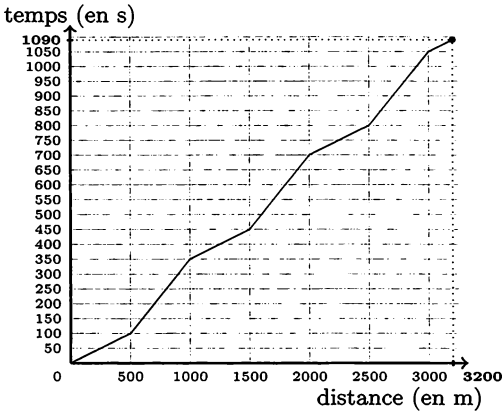
À quatre pirates, le premier propose quatre-vingt-dix-neuf écus pour lui, un écu pour le troisième et rien pour les deux autres. Le troisième est pour car il sait que s'il y a une mutinerie, il va se retrouver en deuxième position avec trois pirates et n'aura rien. La répartition est donc acceptée.

On obtient ainsi les répartitions pour quatre, cinq, ..., dix pirates :

De l'ainé au cadet / Nombre de pirates	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2									100	0
3								99	0	1
4							99	0	1	0
5						98	0	1	0	1
6					98	0	1	0	1	0
7				97	0	1	0	1	0	1
8			97	0	1	0	1	0	1	0
9		96	0	1	0	1	0	1	0	1
10	96	0	1	0	1	0	1	0	1	0

À dix pirates, le premier propose quatre-vingt-seize écus pour lui, rien pour tous les pirates en position paire et un écu pour les autres.

45 La première question à se poser est : est-il possible pour le babouin de ne pas courir à une vitesse régulière ? La réponse est oui ! Par exemple il peut courir 500 m à la vitesse régulière de 5 m/s, puis faire les 500 m suivants à la vitesse régulière de 2 m/s, puis de nouveau 500 m à 5 m/s et encore 500 m à 2 m/s et ainsi de suite.

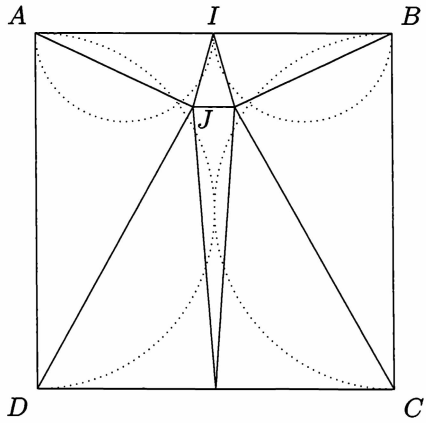


En courant de cette manière, si on considère un intervalle quelconque de 1 km, on voit que le babouin aura couru 500 m à 5 m/s donc en 100 s et 500 m à 2 m/s donc en 250 s. Il aura donc parcouru ce kilomètre en 350 s, c'est-à-dire en 5 min et 50 s. À ce rythme le babouin termine la course en 18 min et 10 s tandis que l'orang-outan la termine en 18 min et 24 s. Le babouin peut donc gagner la course. On note que dans le cas limite où il peut courir à une vitesse infinie, le babouin peut terminer la course en 17 min et 30 s.

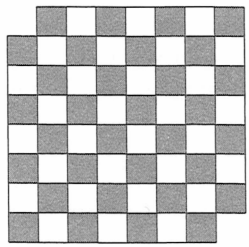
46 Blanche Neige va peser simultanément un lingot du premier nain, deux lingots du deuxième nain, quatre lingots du troisième nain, huit lingots du quatrième nain, seize lingots du cinquième nain, trente-deux lingots du sixième nain et soixante-quatre lingots du septième nain. Le total devrait peser 12 700 g. On fait la différence entre 12 700 g et le résultat de la pesée. On exprime cette différence en grammes, on écrit ce nombre en base 2 et on lit directement quels sont les nains voleurs !

Par exemple, si le résultat de la pesée est 12 670 g, la différence exprimée en grammes est de 30 ce qui s'écrit 0011110_2 en base 2 (voir le rappel 7). Ainsi on voit que les nains voleurs sont les nains numéro 2, 3, 4 et 5.

47 On peut souhaiter faire un triangle ayant un côté du carré comme arête, et un triangle ayant comme arête la moitié d'un côté du carré. Sur la figure ci-dessous, ces triangles sont (AJD) et (AIJ). J doit être placé en dehors des demi-disques délimités par les pointillés de diamètres $[AI]$ et $[AD]$. On complète alors la figure symétriquement, et on vérifie que les huit triangles ainsi formés sont bien tous aigus.



48 C'est impossible. Supposons par l'absurde que l'on ait réussi à paver la salle de bain. On peint alors les carreaux comme suit :



On constate qu'il y a 30 carreaux blancs et 32 carreaux noirs. Or chaque domino recouvrant le sol a eu un carreau peint en noir, l'autre en blanc. Il devrait donc y avoir autant de carreaux blancs que de carreaux noirs. Contradiction.

49 Cela peut paraître surprenant mais le grand frère n'a, malgré sa pièce supplémentaire, qu'une chance sur deux d'obtenir strictement plus de piles que son petit frère.

Il n'y a que deux cas possibles : soit le grand frère fait strictement plus de piles que son petit frère, soit il fait strictement plus de faces que son petit frère. Au moins l'un des deux cas va se produire : puisqu'il a une pièce de plus, le grand frère ne peut pas faire un nombre de piles inférieur ou égal à celui de son petit frère et un nombre de faces inférieur ou égal à celui de son petit frère. De plus, les deux cas ne peuvent pas se produire simultanément : puisqu'il n'a qu'une pièce de plus, le grand frère ne peut pas faire un nombre de piles et un nombre de faces strictement supérieurs à ceux de son petit frère. On sera toujours soit dans un cas, soit dans l'autre, mais jamais dans les deux à la fois.

Les deux cas sont symétriques, ils ont donc la même probabilité et comme ils sont complémentaires, leur probabilité est de $\frac{1}{2}$. Le grand frère n'a donc qu'une chance sur deux d'obtenir strictement plus de piles que son petit frère.

50 Le petit frère a raison : le jeu n'est pas équitable. Cela peut sembler étonnant après le raisonnement convaincant du grand frère. Cependant il y a deux erreurs dans ce raisonnement.

Première erreur Il est vrai que sur trois lancers, la probabilité d'obtenir PFF est égale à celle d'obtenir FFP et vaut $\frac{1}{8}$. Cependant cela n'implique pas que les temps moyens d'apparition de PFF et de FFP soient 8. C'est effectivement le cas, mais c'est un pur hasard. En effet, on peut montrer que le temps moyen d'apparition de PPP est 14 et non 8. Les calculs des temps moyens d'apparition de PPP et PFF sont un peu lourds. Montrons plutôt que les temps moyens d'apparition de PP et PF sont différents bien que leurs probabilités d'apparition sur deux lancers soient égales.

Notons t_0 le temps moyen d'apparition de PP, t_1 le temps moyen d'apparition de PP une fois que l'on a obtenu P. Une fois que l'on a un P, il y a deux possibilités : soit l'on fait face, et l'on retombe dans une situation où le temps moyen d'apparition est t_0, auquel cas le temps moyen depuis le premier P est $t_0 + 1$, soit l'on obtient un deuxième P et c'est fini : le temps moyen depuis le premier P est alors 1. Ainsi,

$$t_1 = \frac{1}{2}(t_0 + 1) + \frac{1}{2} \times 1$$

De la même manière, quand on part de zéro (F ou pas de lancer avant), on a une chance sur deux d'obtenir P, une chance sur deux d'obtenir F, d'où

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_0 + 1) + \frac{1}{2}(t_1 + 1)$$

Il en découle

$$t_0 = 6$$

Calculons de la même façon le temps moyen d'apparition de PF. On note t'_0 le temps moyen d'apparition, t'_1 le temps moyen d'apparition en partant de P. Cette fois-ci, quand, en partant de P, on rate F, on repart de P, et non pas de zéro.

$$t'_1 = \frac{1}{2}(t'_1 + 1) + \frac{1}{2} \times 1$$

$$t'_0 = \frac{1}{2}(t'_0 + 1) + \frac{1}{2}(t'_1 + 1)$$

En remplaçant,

$$t'_0 = 4$$

On a bien $t'_0 \neq t_0$.

Deuxième erreur Il est vrai que les temps moyens d'apparition sont les mêmes, mais cela n'implique pas l'équité du jeu. Supposons par exemple que la séquence PFF apparaisse neuf fois sur dix au premier lancer, une fois sur dix au vingt-et-unième lancer, et que la séquence FFP apparaisse systématiquement au troisième lancer. Le temps moyen d'apparition de PFF est $\frac{9}{10} \times 1 + \frac{1}{10} \times 21 = 3$, celui de FFP est également 3, mais il y a neuf chances sur dix que PFF apparaisse avant FFP. Bien sûr, il est totalement irréaliste que FFP apparaisse systématiquement au troisième lancer, mais cet exemple montre que se baser uniquement sur le temps moyen d'apparition n'est pas suffisant pour conclure. Un événement avec un temps moyen d'apparition très grand peut très bien précéder neuf fois sur dix un autre événement qui a pourtant un faible temps moyen d'apparition.

Voyons maintenant plus précisément pourquoi le grand frère est gagnant. Cela est dû au fait que FFP commence par la fin de PFF. Lorsque FFP apparaît, à moins qu'il n'y ait eu que des F avant, PFF sera apparu plus tôt. Ainsi il suffit d'un P au début pour que le grand frère soit sûr de gagner. Il y a quatre possibilités pour les deux premiers lancers : PP, PF, FP, FF. Si c'est PP, PF, ou FP, le grand frère est sûr de gagner : si FFP apparaît, il y aura eu PFF avant. Sinon, si les deux premiers lancers sont FF, le petit frère est sûr de gagner : il attend juste que la pièce fasse P. Finalement, le petit frère n'a qu'une chance sur quatre de gagner, contre trois chances sur quatre pour son grand frère.

51 La probabilité que le petit frère gagne contre son grand frère est donnée par le tableau ci-dessous :

petit frère \ grand frère	PPP	PPF	PFP	FPP	FFF	FFP	FPF	PFF
PPP		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{5}$
PPF	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$
PFP	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
FPP	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
FFF	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{8}$
FFP	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$
FPF	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$
PF	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	

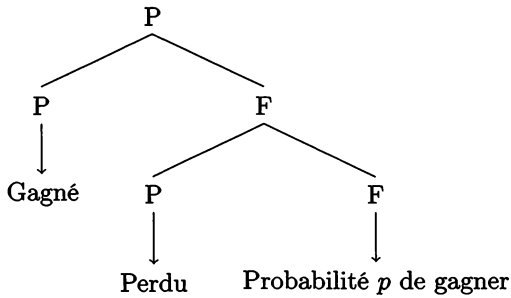
On constate avec ce tableau que, quelle que soit la séquence choisie par le grand frère, le petit frère peut bien choisir une séquence qui le rendra en moyenne gagnant. Par exemple, si le grand frère choisit PFP, le petit frère peut choisir PPF ou FFP : dans les deux cas il aura plus d'une chance sur deux de gagner. Heureusement il n'y a pas besoin de tout calculer. Le grand frère ne peut proposer que huit séquences : PPP, PPF, PFP, FPP, FFF, FFP, FPF, PFF. Quitte à changer P en F et F en P, on peut se restreindre à l'étude des quatre premières séquences : PPP, PPF, PFP, FPP. Traitons ces cas un à un.

PPP L'idée est de choisir une séquence dont la fin est le début de celle proposée par le grand frère. Une séquence pouvant paraître judicieuse est FPP. En effet, on voit que si les trois premiers lancers ne sont pas PPP, le petit frère gagne car si PPP apparaît, FPP sera apparu avant. Il a donc sept chances sur huit de gagner.

PPF Si le grand frère propose PPF, on a vu dans l'énigme précédente que FPP permet au petit frère d'avoir une probabilité $\frac{3}{4}$ de gagner.

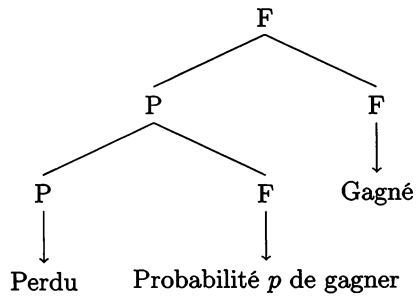
PFP Ici, si le petit frère veut une séquence dont la fin est le début de celle de son grand frère, il peut choisir PPF ou FPF. Cependant il est clair qu'avec FPF il n'a qu'une chance sur deux de gagner, puisque P et F jouent des rôles symétriques. Calculons donc la probabilité p de

gagner avec PPF contre PFP. On s'aide pour cela d'un arbre des lancers, et l'on peut supposer que le premier lancer est P car les F précédents ne changent rien.



On a donc $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p$, d'où $p = \frac{2}{3}$ comme annoncé par le tableau.

FPP Une séquence permettant d'avoir plus d'une chance sur deux de gagner contre FPP est FFP. La probabilité p de gagner avec FFP contre FPP se calcule de la même façon que précédemment. L'arbre est quasiment le même :



Ainsi, $p = \frac{2}{3}$ comme annoncé.

52 La clé est de tourner le problème différemment : avec au plus n lancers, combien d'étages au plus peut-on tester ? On remarque déjà que dès que la première assiette casse, il faut tester tous les étages oubliés un par un avec l'assiette restante, en commençant par le plus bas et en remontant un à un : il n'y a pas d'autre façon de faire lorsqu'on ne dispose plus que d'une assiette.

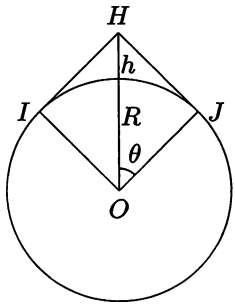
Supposons qu'on ne puisse pas faire plus de n lancers. On peut lancer la première assiette du n-ième étage au maximum. En effet, si elle se

casse, il faudra dans le pire des cas tester les étages 1, 2, 3, ..., $n-1$ avec la deuxième assiette. Si elle ne se casse pas, il reste deux assiettes et $n-1$ lancers, on peut donc relancer la première assiette de l'étage $n+(n-1)=2n-1$ et si elle se casse, il reste $n-2$ lancers pour tester $n-2$ étages. Ainsi, avec deux assiettes et n lancers, il est possible de tester au maximum $u_n = n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$ étages.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour cent étages, on a $u_{13} < 100 < u_{14}$. Il faut donc quatorze lancers dans le pire des cas.

53



La nouvelle longueur du câble est $IH+HJ+\overset{\frown}{IJ}$, avec $\overset{\frown}{IJ}$ la longueur de l'arc de cercle passant par le sud. Étant donné l'angle de 2θ, la longueur de l'arc de cercle passant par le sud entre I et J est $\overset{\frown}{IJ}= 2\pi R - 2\theta R$. De plus $IH = HJ = R\tan(\theta)$. θ est donné par $\cos(\theta) = \frac{R}{R+h}$.

La nouvelle longueur est de $l = 1\,\text{m}$ supérieure à l'ancienne, ainsi $2IH+\overset{\frown}{IJ}-2\pi R = l$ et on obtient en remplaçant : $\tan(\theta)-\theta = \frac{l}{2R}$, ce qui implique déjà que θ est "très petit". On peut ainsi faire les approximations :

$\tan(\theta)-\theta \simeq \frac{\theta^3}{3}$, $\cos(\theta) \simeq 1-\frac{\theta^2}{2}$ et $\frac{R}{R+h} = \frac{1}{1+\frac{h}{R}} \simeq 1-\frac{h}{R}$, d'où $\frac{h}{R} \simeq \frac{\theta^2}{2}$.

Finalement, on obtient $\frac{h}{R} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{3l}{2R}\right)^{\frac{2}{3}}$, soit

$$h \simeq \frac{R^{\frac{1}{3}}}{2}\left(\frac{3l}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Numériquement, $h \simeq 122\,\text{m}$. Ce résultat étonnant valait bien que l'on fasse un peu de géométrie !

Sans faire d'approximations, on peut retrouver à l'aide d'un logiciel de calcul formel $h \simeq 122\,\text{m}$, car les approximations faites précédemment étaient excellentes.

54 Notons b_n le nombre moyen de boucles que Paul obtient en moyenne avec une assiette de n spaghettis. Ainsi, $b_1 = 1$, et on cherche b_{1000}. Considérons une assiette de n spaghettis, avec $n \geq 2$. Le premier nœud que fait Paul noue soit un seul spaghetti, soit deux spaghettis entre eux. Dans le premier cas, le spaghetti bouclé est "hors-jeu" : il y aura en moyenne $b_{n-1}+1$ boucles. Dans le deuxième cas, tout se passe comme si l'assiette n'avait que $n-1$ spaghettis : il y aura en moyenne b_{n-1} boucles. La probabilité que le premier spaghetti noué forme une boucle est $\frac{1}{2n-1}$: en effet, Paul choisit au hasard une première extrémité, puis a $2n-1$ choix pour la seconde. Le nombre moyen de boucles est donc

$$b_n = \frac{1}{2n-1}\left(b_{n-1}+1\right) + \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) b_{n-1}$$

$$b_n = b_{n-1} + \frac{1}{2n-1}$$

Par une récurrence immédiate,

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

Numériquement, $b_{1000} \simeq 4.4$

On peut montrer que

$$\frac{2b_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est-à-dire que pour n grand, $\frac{\ln(n)}{2}$ est une bonne approximation de b_n. On dit que b_n est équivalent à $\frac{\ln(n)}{2}$. La croissance de b_n est logarithmique, donc bien plus lente que ce qu'on pouvait penser.

55 On constate que pour qu'un casier termine fermé après tous les passages, il faut que l'enfant ait changé un nombre pair de fois son état. Il faut donc qu'il soit passé par ce casier un nombre pair de fois. En d'autres termes, il faut que le numéro du casier en question ait un nombre pair de diviseurs sans compter 1 donc au final un nombre impair de diviseurs. C'est le cas si et seulement si c'est un

carré. En effet, soit n un entier naturel non nul et soient $d_1, d_2, \ldots, d_k$ ses diviseurs. On peut les regrouper par paires de la façon suivante : au diviseur d on associe le diviseur $\frac{n}{d}$. Si n n'est pas un carré, $\frac{n}{d}$ est toujours différent de d, donc n a un nombre pair de diviseurs. Si n est un carré, il existe un unique diviseur d tel que $\frac{n}{d} = d$ donc n a un nombre impair de diviseurs. Finalement, les casiers qui sont fermés après tous les passages sont ceux dont le numéro est un carré : le 1, le 4, le 9, etc.

Une autre méthode est de calculer le nombre de diviseurs de n en le décomposant en produit de facteurs premiers :

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

Le nombre de diviseurs de n est donné par la formule :

$$d(n) = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1)$$

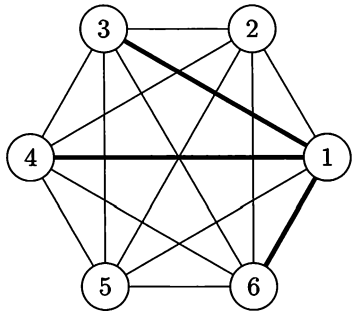
Ainsi, n a un nombre impair de diviseurs si et seulement si tous les α_i sont pairs. Or, dire que tous les α_i sont pairs équivaut à dire que n est un carré.

56 On commence par dessiner le graphe symbolisant les liaisons entre les six personnes : chaque personne est représentée par un sommet numéroté de 1 à 6, et ses liaisons (connaissance ou non-connaissance) avec les autres personnes sont représentées par des traits (voir figure ci-dessous).

La personne 1 a 5 relations avec les autres personnes du groupe, elle a donc au moins 3 relations de même nature, par exemple de connaissance. Sur la figure ces trois relations (en gras) sont celles avec les personnes 3, 4 et 6. Il y a alors deux cas :

— Si deux personnes parmi les trois personnes 3, 4, et 6 se connaissent, alors on obtient un trio de personnes se connaissant deux à deux (ces deux personnes plus la personne 1).
— Sinon ces trois personnes ne se connaissent pas deux à deux.

On a bien dans tous les cas un trio se connaissant deux à deux ou ne se connaissant pas deux à deux.



57 Si le premier rat goûte un mélange des cinq cents premières bouteilles, sa mort ou sa survie le lendemain permet de diviser le problème en deux. Pour diviser une seconde fois le problème en deux, il faut que le deuxième rat goûte également une bouteille sur deux. Mais il faut s'assurer que tous les rats sont utiles : si le premier rat goûte un mélange des cinq cents premières bouteilles et que le second goûte un mélange des cinq cents dernières bouteilles, le second rat ne sert à rien. Pour diviser en deux le nombre de bouteilles autant de fois que voulu sans difficulté, le plus simple est de numéroter les bouteilles en base 2 (voir le rappel 7).

On a : $2^9 \leq 999 < 2^{10}$ donc il faudra dix chiffres pour numéroter toutes les bouteilles. Les numéros iront de $0000000000_2 = 0$ à $1111100111_2 = 999$ qui sera le numéro de la dernière bouteille. Le premier rat goûte toutes les bouteilles dont le premier chiffre du numéro (en partant de la droite) est un 1. Il va donc goûter les bouteilles numéro 0000000001_2,0000000011_2, 0000000101_2, etc. Le second rat goûte toutes les bouteilles dont le deuxième chiffre du numéro est un 1 et ainsi de suite jusqu'au dixième rat qui goûte toutes les bouteilles dont le dixième chiffre du numéro est un 1. Le lendemain, le valet regarde quels sont les rats morts. Si le i-ième rat est mort, comme il a goûté toutes les bouteilles dont le i-ième chiffre du numéro est un 1 (et uniquement celles-là), le valet sait que le numéro de la bouteille empoisonnée a un 1 en i-ième position. Le valet peut ainsi retrouver le numéro de la bouteille empoisonnée. Cette méthode nécessite dix rats. Montrons qu'on ne peut pas faire mieux.

On va montrer qu'avec n rats on ne peut pas discriminer plus de 2^n bouteilles. En d'autres termes, si on suppose que le valet arrive à déterminer la bouteille empoisonnée parmi un certain nombre k de bouteilles avec n rats, on a alors $k \leq 2^n$. Pour cela, on va comparer le nombre de solutions avec le nombre de résultats, cette méthode est détaillée dans le rappel sur le principe des tiroirs. Il y a k bouteilles. Soit c'est la première

bouteille qui est empoisonnée, soit c'est la deuxième, ..., soit c'est la dernière. Il y a donc k solutions différentes au problème. Lorsque le valet fait goûter aux rats des mélanges de bouteilles, le lendemain chaque rat sera mort ou vivant. Comme il y a n rats, il y a 2^n résultats possibles. Le principe des tiroirs montre qu'on doit avoir nécessairement plus de résultats possibles que de solutions différentes au problème. On a donc $k \leq 2^n$. Avec $k = 1000$ bouteilles, on obtient $1000 \leq 2^n$ donc $10 \leq n$. Il faut au moins dix rats.

58 Pour k entre 0 et 100, on note c_k le nombre moyen de cartes qu'il faut acheter pour terminer la collection sachant qu'on a déjà k cartes distinctes. Par exemple, $c_{100} = 0$ et $c_{99} = 100$ car quand on a quatre-vingt-dix-neuf cartes distinctes il n'en manque qu'une seule et comme on a une chance sur cent d'acheter la carte manquante à chaque fois qu'on achète une carte, il faut encore acheter cent cartes en moyenne pour terminer la collection. On cherche c_0.

Soit k entre 0 et 100, on suppose qu'on a k cartes distinctes. On achète une carte de plus. Cette carte a k chances sur 100 d'être une carte qu'on possédait déjà (dans ce cas il faut encore acheter c_k cartes) et $100 - k$ chances sur 100 d'être une nouvelle carte (dans ce cas il ne reste plus qu'à acheter c_{k+1} cartes). On obtient ainsi la relation suivante :

$$c_k = 1 + \frac{k}{100} c_k + \frac{100 - k}{100} c_{k+1}$$

Cette relation se réécrit :

$$c_k - c_{k+1} = \frac{100}{100 - k}$$

On fait la somme entre 0 et 99 :

$$\sum_{k=0}^{99} (c_k - c_{k+1}) = \sum_{k=0}^{99} \frac{100}{100 - k}$$

$$\sum_{k=0}^{99} (c_k - c_{k+1}) = c_0 - c_{100} = c_0$$

$$\sum_{k=0}^{99} \frac{100}{100 - k} = \sum_{k=1}^{100} \frac{100}{k}$$

On obtient ainsi :

$$c_0 = \sum_{k=1}^{100} \frac{100}{k}$$

donc $c_0 \simeq 518.7$ jours.

59 Trouver le prix de ce jeu, c'est déterminer combien il fait gagner en moyenne, son gain moyen, c'est-à-dire son espérance notée $\mathbb{E}(G)$. Pour calculer son espérance, il faut déterminer tous les montants G_n qu'on peut gagner, ainsi que la probabilité $\mathbb{P}(G_n)$ de les gagner. L'espérance se calcule ensuite comme la somme de tous les montants possibles multipliés par leur probabilité associée :

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(G_n) \times G_n$$

Dans ce jeu, on gagne 2^{n-1} euros si le banquier fait face au bout du n-ième lancer. Les gains possibles sont donc les $G_n = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Pour $n \geq 1$, on gagne $G_n = 2^{n-1}$ euros si le banquier fait une série de $(n-1)$ piles et face ensuite c'est-à-dire s'il fait la séquence

$$\underbrace{\text{P...P}}_{(n-1) \text{ fois}}\text{F}$$

La probabilité de cet événement est donc :

$$\mathbb{P}(G_n) = \underbrace{\frac{1}{2} \times ... \times \frac{1}{2}}_{(n-1) \text{ fois}} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Il y a une infinité de gains possibles, la somme est donc infinie. Finalement on obtient pour l'espérance :

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_n) \times 2^{n-1} = \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} + ... = +\infty$$

On obtient une espérance infinie. Ce résultat est paradoxal. Même si on a beaucoup de chance, le banquier finira bien par faire face à un moment et la partie s'arrêtera. Dans tous les cas il ne versera donc qu'une somme finie d'argent. Pourtant, l'espérance de gain est infinie !

La question du prix du jeu semble donc insoluble : verser pour jouer à ce jeu une infinité d'argent n'a aucun sens et on serait certain de perdre une infinité à chaque fois, puisque dans tous les cas on ne reçoit au final qu'une somme d'argent finie ; par ailleurs, si on verse pour jouer à ce jeu une somme d'argent finie (10000 euros par exemple), ce jeu nous est favorable, comme l'espérance de gain est infinie, on sait qu'en y jouant un grand nombre de fois on finira forcément par devenir gagnant.

Pour lever ce paradoxe, on peut supposer que le banquier ne pourra plus payer à partir d'un certain montant. Si par exemple le banquier ne peut pas nous verser plus de 2^{30} euros (ce qui fait environ un milliard) l'espérance devient :

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{30} \mathbb{P}(G_n) \times 2^{n-1} + \mathbb{P}(G_{31}) \times 2^{30}$$

Mais $\mathbb{P}(G_{31})$ a maintenant changé :

$$\mathbb{P}(G_{31}) = 1 - \sum_{n=1}^{30} \mathbb{P}(G_n)$$

$$\mathbb{P}(G_{31}) = 1 - \sum_{n=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or

$$\sum_{n=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}$$

donc

$$\mathbb{P}(G_{31}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{30}$$

On obtient

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{30} \mathbb{P}(G_n) \times 2^{n-1} + \mathbb{P}(G_{31}) \times 2^{30}$$

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{30} \times 2^{30}$$

$$\mathbb{E}(G) = \underbrace{\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{30 \text{ fois}} + 1 = 16$$

Ainsi, le prix du jeu dans ces conditions est fini et le paradoxe est levé.

Une approche plus générale pour lever ce paradoxe est de considérer une fonction d'utilité. L'idée est de dire que lorsqu'on reçoit deux mille euros au lieu de mille euros on est deux fois plus content, alors que lorsqu'on reçoit un milliard au lieu de deux milliards, cela ne change pas grand-chose. On va donc calculer l'espérance en remplaçant les gains G_n

par l'utilité des gains $u(G_n)$. Il faut pour cela déterminer une fonction d'utilité u qui, à un certain montant x, associe son utilité $u(x)$.

Une fonction d'utilité est toujours croissante et concave. Une fonction d'utilité naturelle est la fonction logarithme. Voyons ce que donne le calcul de l'espérance avec cette fonction d'utilité :

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_n) \times \ln(2^{n-1})$$

$$\mathbb{E}(G) = \ln(2) \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_n) \times (n-1) \right)$$

$$\mathbb{E}(G) = \ln(2)$$

Là encore, on trouve un prix fini et le paradoxe est levé. Notons que cette approche est une généralisation de la précédente puisque que la fonction :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2^{30} \\ 2^{30} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

est croissante et concave, c'est donc une fonction d'utilité, et elle permet de retrouver le résultat précèdent.

60 Étant donné qu'il n'y a pas d'égalité possible, un des deux joueurs (soit celui qui commence, soit l'autre) possède une stratégie gagnante. En effet, soit le premier joueur a une stratégie gagnante, soit quel que soit son premier coup le deuxième joueur peut le battre, dans ce cas-là ce dernier a une stratégie gagnante.

Supposons par l'absurde que le deuxième joueur dispose d'une stratégie gagnante. Si le premier commence par prendre le carré de chocolat en haut à droite, le deuxième va trouver un coup lui permettant, malgré tous les efforts du premier, de finir par gagner. Or, comme le premier coup ne consistait qu'à prendre le coin supérieur droit, le deuxième coup aurait pu être joué dès le début, par le premier joueur. Mais alors, dans cette situation, le deuxième joueur est bloqué, quoi qu'il fasse le premier finira par gagner (en s'y prenant bien). Cela contredit le fait qu'il dispose d'une stratégie gagnante ! C'est donc le premier joueur qui possède une stratégie gagnante.

61 Il n'y a pas de stratégies gagnantes : il y aura toujours égalité, c'est-à-dire que si les deux joueurs jouent bien, aucun n'arrivera à sélectionner trois chiffres dont la somme vaut quinze.

Quelles sont les différentes façons d'obtenir quinze ? Écrivons-les toutes :

$$\begin{array}{l} 9+5+1 \\ 9+4+2 \\ 8+6+1 \\ 8+5+2 \\ 8+4+3 \\ 7+6+2 \\ 7+5+3 \\ 6+5+4 \end{array}$$

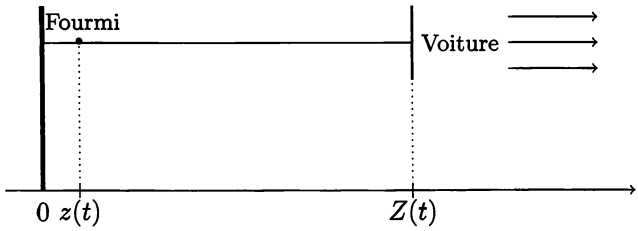
Considérons maintenant le carré magique suivant :

$$\begin{array}{ccc} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{array}$$

Ce qui est magique, c'est que les sommes selon chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale font toujours quinze. Cela donne huit façons différentes de faire quinze. Or il n'y en a que huit, donc pour faire quinze, il suffit et il faut sélectionner trois chiffres sur une même ligne, colonne ou diagonale. On joue donc au morpion ! Il n'est pas compliqué de vérifier qu'au morpion, il n'y a pas de stratégie gagnante. D'où le résultat annoncé.

62 La fourmi va rattraper la voiture, mais au bout d'un temps énorme !

La première difficulté est de déterminer l'équation du mouvement. Notons (Oz) l'axe sur lequel se déplace la voiture, ainsi le poteau est à $z = 0$ et la voiture est initialement à $z = 1\,\text{m}$ que l'on note d. À l'instant t, la voiture est à $Z(t) = Vt + d$, avec $V = 200\,\text{km/h}$. Soit $z(t)$ la position de la fourmi sur l'axe (Oz) à l'instant t.



Sa vitesse est sa vitesse relative, $v = 1\,\mathrm{m/min}$, plus la vitesse du point de l'élastique sur lequel elle se trouve à l'instant t. Quelle est la vitesse d'un point quelconque de l'élastique ? Au niveau du poteau, elle est nulle, au niveau de la voiture, elle vaut V. Déterminons-la pour un point se trouvant à un certain rapport x de l'élastique : x est le rapport de la distance du point au poteau par la distance de la voiture au poteau. Comme l'élastique se tend uniformément, un point situé à un rapport x reste à ce rapport x, en notant $\tilde{z}(t)$ sa position à l'instant t, $\frac{\tilde{z}(t)}{Z(t)}$ est constant et vaut x. En dérivant, $\tilde{z}'(t) = xV$. En particulier, la fourmi se trouvant à un rapport $x = \frac{z(t)}{Z(t)}$, sa vitesse d'entraînement par l'élastique est $\frac{z(t)V}{Z(t)}$. Finalement,

$$z'(t) = v + \frac{z(t)V}{Z(t)}$$

$$z'(t) - \left(\frac{V}{Z(t)}\right) z(t) = v$$

On a affaire à une équation différentielle du premier ordre à second membre non nul. Les solutions de l'équation homogène associée (c'est-à-dire en remplaçant v par 0) sont les Az_0, avec A une constante et

$$z_0(t) = \frac{Vt + d}{d}$$

Il suffit à présent de trouver une solution particulière pour avoir toutes les solutions. Cherchons-la sous la forme

$$z(t) = \lambda(t) z_0(t)$$

avec λ une fonction continûment dérivable. z est solution si et seulement si

$$\lambda'(t) z_0(t) = v$$

$$\lambda'(t) = \frac{vd}{Vt + d}$$

Ainsi, une fonction convenable est

$$\lambda(t) = \frac{vd}{V} \ln\left(t + \frac{d}{V}\right)$$

Finalement, les solutions sont

$$z(t) = (Vt + d)\left(\frac{v}{V} \ln\left(t + \frac{d}{V}\right) + C\right)$$

avec C une constante. Comme $z(0) = 0$, $z(t) = \frac{v}{V}(Vt + d)\ln\left(\frac{V}{d}t + 1\right)$.

La fourmi rattrape la voiture s'il existe $t > 0$ tel que $z(t) = Z(t)$. Cela équivaut à

$$\frac{v}{V} \ln\left(\frac{V}{d}t + 1\right) = 1$$

soit

$$t = \frac{d}{V}\left(\exp\left(\frac{V}{v}\right) - 1\right)$$

La fourmi rattrape donc la voiture, au bout d'un temps $t \simeq 2.5 \times 10^{1438}$ années.

À côté de ce temps, l'âge de l'univers est complètement négligeable !

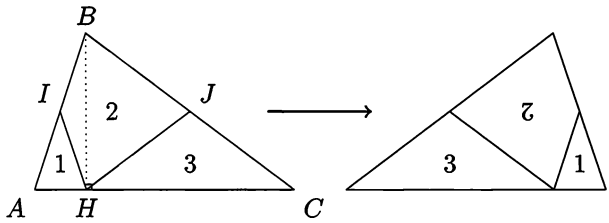
63 On considère une distribution de poids qui fonctionne, c'est-à-dire telle que, quelle que soit la noisette que l'écureuil met de côté, il arrive toujours à séparer les dix autres en deux groupes de cinq noisettes ayant le même poids. On veut montrer que toutes les noisettes ont le même poids. À partir de maintenant on assimilera les poids des noisettes aux entiers représentant ces poids en milligramme.

Déjà on remarque que tous les poids ont la même parité. En effet si une noisette a un poids pair (respectivement impair), comme on peut séparer les dix autres noisettes en deux groupes de même poids, la somme des autres poids est paire. La somme totale des noisettes est donc paire (respectivement impaire). Si l'on prend maintenant une noisette quelconque, comme la somme des dix autres poids est paire et que la somme totale est paire (respectivement impaire), cette noisette a un poids pair (respectivement impair).

Maintenant on remarque que si une distribution fonctionne et contient un poids pair, on peut diviser tous les poids par deux et elle fonctionne toujours. On peut aussi diminuer tous les poids d'une unité. En enlevant à tous les poids le poids minimal, on a une distribution qui fonctionne avec au moins un poids nul. Soit tous les poids sont nuls et dans ce cas ils étaient tous égaux, soit il existe encore au moins un poids non nul.

Dans ce cas-là, comme il y a un poids pair (zéro), on peut diviser par deux, et ce autant de fois que nécessaire pour réduire le poids non nul à un impair. On a un poids nul et un poids impair : contradiction. D'où le résultat.

64 Soit (ABC) le triangle modélisant le gâteau. Pour tout triangle, il existe un pied de la hauteur issue d'un sommet appartenant à un côté. Ici on va considérer H, pied de la hauteur issue de B. Soient I et J les milieux des segments $[AB]$ et $[BC]$. Deux coups de couteau suivant les droites (HI) et (HJ) résolvent le problème : en effet il n'est pas compliqué de réordonner les pièces ainsi découpées pour former le symétrique du triangle (ABC).



65 Le cas $n = 2$ est connu de n'importe quelle personne qui a au moins un frère ou une sœur. La première personne coupe la pizza en deux et l'autre choisit sa part. Résolvons le problème dans le cas $n = 3$. Une personne coupe ce qui lui semble être un tiers de la pizza. Si la deuxième personne juge que cette part fait plus d'un tiers, elle peut la raboter. La troisième personne peut faire de même sur la part déjà éventuellement rabotée. La règle est la suivante : la dernière personne à avoir touché la part la prend. Ainsi, personne ne va raboter la part en une part qui fait moins d'un tiers à ses yeux, de peur de la prendre si plus personne n'y touche. Tout le monde est content : la dernière personne à avoir touché à la part a eu ce qu'elle estime être plus d'un tiers, quant aux deux autres, elles ne pensent pas que cette part fasse plus d'un tiers donc pensent avoir plus de deux tiers à partager. Elles se partagent le reste sans difficulté (c'est le cas $n = 2$).

Ce raisonnement s'étend facilement pour n personnes. La première coupe la part qui lui convient, puis chacun à tour de rôle peut raboter cette part, sachant que le dernier à y toucher la prend. On se ramène ainsi à un partage entre $n - 1$ personnes. On a donc construit une stratégie de partage par récurrence. Le problème est résolu.

66 Remarquons déjà qu'avec deux soldats le résultat est faux : les deux soldats se surveillent mutuellement et aucun soldat n'est laissé sans surveillance. De même avec quatre soldats, il est facile de trouver une configuration où aucun soldat n'est laissé sans surveillance. En fait, la propriété proposée n'est pas vraie avec un nombre pair de soldats. Par contre, la propriété est vraie pour un nombre impair de soldats.

Démontrons ce résultat par récurrence. Pour tout $n \geq 0$, on note P_n la propriété : "Avec $2n+1$ soldats, au moins un soldat est laissé sans surveillance". L'initialisation avec $n = 0$ est évidente. Pour l'hérédité, soit $n \geq 0$, on suppose P_n vraie et on veut montrer P_{n+1}. On considère donc un groupe de $2n+3$ soldats. Les distances mutuelles entre les soldats sont toutes différentes donc il existe deux soldats dont la distance mutuelle est minimale. Ces deux soldats se surveillent mutuellement. Il y a deux cas. Soit un des deux soldats de cette paire est surveillé, en plus du soldat se trouvant à distance minimale, par un autre soldat. Dans ce cas-là un des soldats n'est pas surveillé, car si tous les soldats étaient surveillés, ils seraient nécessairement chacun surveillés par un seul soldat. Soit les deux soldats à distance minimale ne sont pas surveillés par d'autres soldats. On peut alors les retirer et considérer le groupe de $2n+1$ soldats restant. On applique la propriété de récurrence à ce groupe : il existe au moins un soldat laissé sans surveillance. Ce soldat reste sans surveillance quand on ajoute les deux soldats qui se surveillent mutuellement, d'où le résultat.

67 Déterminons dans un premier temps le nombre minimum de cadenas que le serrurier doit utiliser. On considère un groupe de six pirates. Ce groupe ne peut pas ouvrir à lui seul le coffre, il y a donc au moins un cadenas que ce groupe ne peut pas ouvrir. Maintenant, si on considère n'importe quel autre groupe de six pirates différent du premier, il y a au moins un cadenas que ce groupe ne peut pas ouvrir mais ce cadenas est différent de celui du premier groupe. En effet, si deux groupes distincts de six pirates ne peuvent pas ouvrir un même cadenas, alors il est possible de trouver un groupe de sept pirates qui ne peut pas ouvrir ce cadenas, ce qui est absurde. On dispose donc une injection allant de l'ensemble des groupes de six pirates dans l'ensemble des cadenas. Il faut au moins utiliser $\binom{13}{6} = 1716$ cadenas.

Pour mettre un tel système en place, le serrurier numérote de 1 à 1716 les cadenas et numérote de 1 à 1716 les groupes de sept pirates possibles, en exploitant l'égalité $\binom{13}{7} = \binom{13}{6}$ (voir le rappel 2). Il distribue ensuite à chacun des pirates du groupe numéro i une clé du cadenas numéro i, et ce pour chacun des 1716 groupes. Vérifions que ce système fonctionne.

Tout groupe de six pirates ne peut pas ouvrir le coffre car il leur manque la clé du cadenas du groupe des sept pirates manquants. En revanche, dès que sept pirates se rassemblent, ils possèdent la clé numéro i (et ce pour tout i) puisque le groupe de pirates numéro i contient forcément au moins un pirate du groupe.

68 On remarque pour commencer qu'avec un poids de 1 kg et un poids de 3 kg on peut déjà déterminer le poids de tout objet compris entre 1 kg et 4 kg. Pour peser un objet de 2 kg avec ces poids il suffit de placer l'objet et le poids de 1 kg à gauche et le poids de 3 kg à droite.

Si on choisit des poids de masse 1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg, ..., 3^9 kg, on peut déterminer le poids de tout objet compris entre 1 kg et $1+3+\cdots+3^9 = \frac{3^{10}-1}{2}$ kg. En effet, montrons par récurrence sur $n \geq 0$ qu'avec des poids de masse 1 kg, 3 kg, ..., 3^n kg on peut déterminer le poids de tout objet compris entre 1 kg et $\frac{3^{n+1}-1}{2}$ kg.

L'initialisation est claire. Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$. On dispose de poids de masse 1 kg, 3 kg, ..., 3^{n+1} kg. Si on veut peser une masse entre 1 kg et $\frac{3^{n+1}-1}{2}$ kg, c'est facile (il n'y a pas besoin du poids de masse 3^{n+1} kg). Pour peser un objet de masse comprise entre $\frac{3^{n+1}+1}{2}$ kg et $\frac{3^{n+2}-1}{2}$ kg, on commence par soustraire à cette masse 3^{n+1} kg en plaçant le poids correspondant sur le plateau opposé. Cela donne une masse comprise entre $-\frac{3^{n+1}-1}{2}$ kg et $\frac{3^{n+1}-1}{2}$ kg, donc mesurable à l'aide des autres poids. Ce qui achève la récurrence.

Peut-on faire mieux ? Non. On utilise la méthode de comparaison résultats/solutions (voir le rappel 1). Calculons le nombre maximal de pesées différentes que l'on peut effectuer avec dix poids. Pour chaque poids on a trois possibilités : soit on le place sur le plateau de gauche, soit on le place sur le plateau de droite, soit on ne le met pas sur la balance. Cela fait 3^{10} pesées possibles, en fait seulement $3^{10}-1$ pesées possibles car la pesée où aucun poids n'est sur la balance n'en est pas une. Il faut ensuite diviser par deux le résultat car les plateaux sont symétriques. On obtient donc, au plus, $\frac{3^{10}-1}{2}$ pesées possibles. Ce maximum est atteint avec le système de poids précédent, d'où le résultat.

69 L'éléphant peut acheminer au maximum 533 bananes à l'oasis. Il y a pour cela plusieurs stratégies possibles.

Une stratégie possible L'éléphant achemine un maximum de bananes kilomètre par kilomètre. Il part du kilomètre 0 avec 1000 bananes sur le dos, il arrive au kilomètre 1 avec 999 bananes, en dépose 998 et en garde

une pour revenir au kilomètre 0. Il recommence et dépose à nouveau 998 bananes. Enfin, il prend les 1000 dernières bananes et en dépose 999 au kilomètre 1. Finalement, l'éléphant est passé du kilomètre 0 au kilomètre 1 en consommant 5 bananes et a acheminé $998 \times 2 + 999 = 2995$ bananes. Il recommence et achemine 2990 bananes au kilomètre 2. À chaque kilomètre, il consomme 5 bananes pour acheminer toutes les autres. Il continue de la même manière et arrive au kilomètre 200 avec 2000 bananes. Il part du kilomètre 200 avec 1000 bananes sur le dos, il arrive au kilomètre 201 avec 999 bananes, en dépose 998 et en garde une pour revenir au kilomètre 200. Il prend les 1000 dernières bananes et en dépose 999 au kilomètre 201. Finalement, l'éléphant est passé du kilomètre 200 au kilomètre 201 en consommant 3 bananes et a acheminé $998 + 999 = 1997$ bananes. Il recommence et achemine 1994 bananes au kilomètre 202. À chaque kilomètre, il consomme 3 bananes pour acheminer toutes les autres. Il continue de la même manière et arrive au kilomètre 533 avec 1001 bananes. Il laisse alors une banane sur le chemin et part directement avec les mille bananes restantes à l'oasis. Il arrive 467 kilomètres plus tard avec 533 bananes.

Preuve de l'optimalité On appelle stratégie tout trajet de l'éléphant commençant au départ, se terminant à l'oasis et respectant les règles de déplacement. En un mot, une stratégie est une solution possible du problème et on veut montrer qu'il n'y a pas de meilleures stratégies que celles qui permettent au marchand d'acheminer 533 bananes à l'oasis.

Commençons par démontrer que si une stratégie (S) permet d'acheminer un certain nombre n de bananes à l'oasis, alors il existe une autre stratégie (S') qui permet aussi d'acheminer n bananes à l'oasis mais avec une étape où l'éléphant se trouve au kilomètre 999 avec toutes les bananes disponibles à côté de lui.

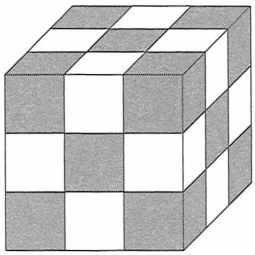
On considère une stratégie (S) qui permet d'acheminer n bananes à l'oasis. Dans cette stratégie, l'éléphant va passer un certain nombre de fois, noté p, par l'oasis pour acheminer les bananes. Au passage $i \in \{1, ..., p\}$, l'éléphant dépose un nombre b_i de bananes à l'oasis.

On peut alors construire une stratégie (S') à partir de la stratégie (S). L'éléphant effectue les mêmes actions que dans la stratégie (S) mais à chaque fois qu'il arrive à l'oasis, au lieu d'aller à l'oasis, il s'arrête un kilomètre avant et il largue $b_i + 2$ bananes au kilomètre 999 (au lieu d'en larguer b_i à l'oasis et d'en consommer 2 pour l'aller-retour). L'éléphant continue ensuite comme dans la stratégie (S) puisqu'il a le même nombre de bananes sur le dos que s'il avait fait l'aller-retour à l'oasis. Avant le dernier passage à l'oasis prévu dans la stratégie (S), l'éléphant est au

kilomètre 999 avec à ses côtés $b_p + 1 + \sum_{i=1}^{p-1}(b_i + 2)$. Maintenant, l'éléphant achemine toutes ses bananes à l'oasis en p passages et par paquets de b_i bananes. On a bien une stratégie (S') qui permet d'acheminer le même nombre de bananes mais avec une étape où l'éléphant se trouve au kilomètre 999 avec toutes les bananes disponibles à côté de lui.

Trouver la meilleure stratégie (S) pour acheminer 3000 bananes à une oasis située à 1000 km revient donc à trouver la meilleure stratégie (S') pour acheminer 3000 bananes à une oasis située à 999 km. On en déduit par récurrence que la meilleure stratégie revient à acheminer d'abord toutes les bananes au kilomètre 1, puis toutes les bananes au kilomètre 2 et ainsi de suite jusqu'à l'oasis. Cette stratégie est celle où l'éléphant déplace toute sa cargaison kilomètre par kilomètre. Elle permet d'acheminer 533 bananes jusqu'à l'oasis. On ne peut pas faire mieux !

70 Colorions les vingt-sept petits cubes en blanc et noir, de sorte que chaque petit cube soit entouré de cubes adjacents de couleur opposée, comme ci-dessous :



Le termite traverse des cubes de couleurs alternées. Comme il dévore un nombre impair de cubes, il doit commencer par un cube blanc pour finir par le cube du centre qui est blanc. Mais alors, si le termite mange tous les cubes en partant d'un blanc et en finissant par un blanc, il y aura un cube blanc de plus que de cubes noirs. Or il y a 13 cubes blancs et 14 cubes noirs. C'est donc impossible.

71 Commençons par résoudre le problème dans le cas où les prisonniers savent que l'ampoule est initialement éteinte. Les prisonniers choisissent un chef, qui sera chargé de compter les passages et d'annoncer le moment venu que tout le monde est passé. À part le chef, les prisonniers allument la lumière si elle est éteinte, mais pas plus d'une fois, c'est-à-dire que si un prisonnier voit la lumière éteinte mais l'a déjà allumée à un passage précédent, il ne fait rien. Lorsque le chef est appelé,

il éteint toujours la lumière si elle est allumée. Ainsi, lorsque le chef aura éteint la lumière 99 fois, c'est que les 99 autres prisonniers seront passés et il pourra l'annoncer.

Pour passer au cas général, on modifie légèrement la stratégie précédente. À part le chef, les prisonniers allument la lumière si elle est éteinte, deux fois et pas plus. Si la lumière est initialement éteinte, le chef aura à l'éteindre $99 \times 2 = 198$ fois, sinon, il devra l'éteindre une fois de plus, soit 199 fois. Dans tous les cas, quand le chef l'aura éteinte 198 fois, il saura que tout le monde est passé au moins une fois.

72 L'application qui à un numéro de tiroir associe le numéro que contient le tiroir est, par hypothèse, une permutation que l'on notera σ (voir le rappel 4). Les prisonniers peuvent se mettre d'accord sur la stratégie suivante : chaque prisonnier teste d'abord le tiroir correspondant à son numéro, puis le tiroir indiqué par le numéro qu'il y trouve, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il trouve son numéro. En d'autres termes, le prisonnier numéro i teste les tiroirs i, $\sigma(i)$, $\sigma(\sigma(i))$, etc.

On peut décomposer σ en cycles de supports disjoints. La stratégie marche si et seulement si σ ne contient aucun cycle de longueur strictement supérieure à 50. En effet, s'il existe un tel cycle, tous les prisonniers de ce cycle ne trouveront pas leurs numéros (ils finiraient par le trouver mais en testant plus de cinquante tiroirs). S'il n'existe pas de cycle de longueur strictement supérieure à 50, tous les prisonniers ont un numéro appartenant à un cycle de longueur inférieure à 50 donc la stratégie marche. Il reste à calculer la probabilité p que σ vérifie cette propriété.

Soit N le nombre de permutations de $\{1, ..., 100\}$ contenant un cycle de longueur strictement supérieure à 50. Soit $k \in \{51, ..., 100\}$. Choisir une permutation de $\{1, ..., 100\}$ contenant un cycle de longueur k, c'est choisir un support de ce cycle parmi les $\binom{100}{k}$ supports possibles, puis le cycle parmi les $(k-1)!$ cycles de longueurs k possibles, et enfin le reste de la permutation parmi $(100-k)!$ possibilités. Ainsi, il y a $\binom{100}{k}(k-1)!(100-k)! = \frac{100!}{k}$ permutations de $\{1, ..., 100\}$ contenant un cycle de longueur k. Toute permutation de $\{1, ..., 100\}$ contenant un cycle supérieur de longueur strictement supérieure à 50 n'en contient qu'un seul, ainsi

$$N = \sum_{k=51}^{100} \frac{100!}{k}$$

La probabilité que la stratégie échoue est donc

$$1 - p = \frac{N}{100!} = \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k}$$

d'où

$$p = 1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k}$$

Numériquement, $p \simeq 0.312$: la stratégie a bien une probabilité de réussite supérieure à 30%.

Et s'il y avait plus de cent prisonniers ? Avec $2n$ prisonniers et la règle "un prisonnier ne peut pas ouvrir plus de n tiroirs", on obtient une probabilité de réussite

$$p_n = 1 - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

On constate que $\lim_{n \to +\infty} p_n = 1 - \ln(2)$, qui est encore supérieur à 30%.

73 On commence par numéroter les sept couleurs de 0 à 6. Si un prisonnier connaît la somme des couleurs des sept chapeaux modulo 7 (voir le rappel 6), il peut en déduire la couleur de son chapeau. Mais les prisonniers n'ont aucun moyen de savoir quelle va être la somme modulo 7 des couleurs. Tout ce qu'ils savent est que cette somme, modulo 7, sera comprise entre 0 et 6. Néanmoins, les prisonniers peuvent se mettre d'accord pour que le premier prisonnier considère la somme congrue à 0 modulo 7 et annonce la couleur de son chapeau en conséquence, le deuxième à 1 modulo 7, ..., le septième à 6 modulo 7. De cette façon, exactement un prisonnier devinera sa couleur.

74 Commençons par présenter une stratégie possible et montrons ensuite qu'elle répond au problème posé. Tout d'abord, les prisonniers se numérotent de 1 à 7. Plaçons-nous dans la peau du prisonnier numéro 1. Il observe les six autres prisonniers et il les classe dans l'ordre croissant de leurs chapeaux. Il obtient par exemple le classement suivant : $5, 2, 4, 7, 3, 6$. Il ajoute à la fin du classement son numéro : $5, 2, 4, 7, 3, 6, 1$. C'est une permutation de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (voir le rappel 4). Il lui reste à calculer la signature de cette permutation, puis à prendre un t-shirt noir si la signature est -1 et un t-shirt blanc si la signature est 1.

Voyons maintenant pourquoi cette stratégie fonctionne. Tout d'abord, il faut se convaincre de la propriété suivante : "Si la stratégie adoptée est telle que, dès que deux prisonniers ont sur leurs chapeaux des réels voisins ils choisissent des couleurs de t-shirt différentes, alors les prisonniers auront bien leurs t-shirts de couleurs alternées."

Ensuite il faut montrer que la stratégie présentée respecte cette propriété. Pour s'en convaincre, considérons un exemple :

prisonnier	1	2	3	4	5	6	7
réel	$-\pi$	0	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{11}$	-0.1	1000	$\frac{1}{2}$

Dans cet exemple, les prisonniers sont triés dans l'ordre $1, 5, 2, 4, 7, 3, 6$. On constate que les prisonniers 4 et 7 ont un réel voisin (mais ils ne le savent pas). On se place dans la peau du prisonnier 4 et on applique la stratégie présentée précédemment. Le prisonnier 4 voit les six prisonniers restant dans l'ordre $1, 5, 2, 7, 3, 6$. Il ajoute son numéro à la fin et calcule la signature de la permutation qui à $1, \ldots, 7$ associe respectivement $1, 5, 2, 7, 3, 6, 4$. Maintenant, on se place dans la peau du prisonnier 7. Il voit $1, 5, 2, 4, 3, 6$ et il calcule la signature de la permutation qui à $1, \ldots, 7$ associe $1, 5, 2, 4, 3, 6, 7$. En fait, on constate que puisque les prisonniers 4 et 7 ont un réel voisin, ils vont voir le même ordre pour les six prisonniers restant, à l'exception du 4 qui sera un 7 et du 7 qui sera un 4. Ils vont donc calculer la signature de deux permutations identiques à une transposition près : on passe de $1, 5, 2, 7, 3, 6, 4$ à $1, 5, 2, 4, 3, 6, 7$ en inversant la position du 4 et du 7. La signature de la première permutation sera donc l'opposée de la signature de la seconde. Les prisonniers 4 et 7 vont donc choisir des t-shirts de couleurs différentes. La propriété est donc vérifiée et la stratégie présentée fonctionne.

75 Résolvons d'abord le cas simple. Commençons par remplir le pichet de 3 L avec du vin du tonneau. Maintenant on remplit le pichet de 5 L avec le pichet de 3 L. On remplit encore le pichet de 3 L, et on le verse dans celui de 5 L jusqu'à ce que ce dernier soit plein. Il reste 1 L dans le pichet de 3 L.

Passons au cas général. p et q sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $up + vq = 1$. Puisque p et q sont positifs, soit u soit v est négatif. Supposons que v soit négatif (le cas u négatif se traite de la même manière). On peut alors écrire $up = 1 + |v|q$. Il suffit donc de remplir le pichet de q litres avec up litres obtenus en remplissant u fois le pichet de

p litres, en le vidant à chaque fois qu'il est plein pour obtenir à la fin un litre. En effet, si l'on note r le nombre de litres dans le pichet de q litres à l'issue de l'opération, on a $up \equiv r\,[q]$, or $up \equiv 1\,[q]$, donc $r \equiv 1\,[q]$. Comme $0 \leq r < q$, $r = 1$.

Par exemple, les entiers 11 et 47 sont premiers entre eux. On a la relation de Bézout suivante : $4\times47-17\times11 = 1$ donc $4\times47 = 1+17\times11$. Il suffit donc de remplir quatre fois le pichet de quarante-sept litres en le vidant dans celui de onze litres pour obtenir un litre : on remplit une première fois le pichet de onze litres avec celui de quarante-sept litres, il reste trois litres dans le pichet de onze litres, on remplit une seconde fois le pichet de onze litres avec celui de quarante-sept litres, il reste six litres dans le pichet de onze litres, on remplit une troisième fois le pichet de onze litres avec celui de quarante-sept litres, il reste neuf litres dans le pichet de onze litres, enfin on remplit une quatrième fois le pichet de onze litres avec celui de quarante-sept litres, il reste un litre dans le pichet de onze litres, c'est terminé !

76 Commençons par le cas $q = 2$. Montrons qu'avec n rats et en deux jours, on ne peut pas discriminer plus de 3^n bouteilles, on montrera ensuite comment discriminer 3^n bouteilles. Supposons que l'on puisse discriminer k bouteilles. Une fois encore, on va comparer le nombre de solutions avec le nombre de résultats. Il y a k bouteilles donc k solutions différentes au problème. Comptons le nombre de résultats en comptant le nombre de rats morts à la fin du premier jour. À la fin du premier jour, il y a entre 0 et n rats morts. Si aucun rat n'est mort le premier jour, il reste n rats donc 2^n résultats possibles pour le second jour. Si un seul rat est mort le premier jour, il reste $n-1$ rats donc 2^{n-1} résultats possibles pour le second jour. Si i rats sont morts le premier jour, il reste $n-i$ rats donc 2^{n-i} résultats possibles pour le second jour. Si tous les rats sont morts le premier jour, il ne reste aucun rat donc un seul résultat possible pour le second jour : tous les rats sont morts à la fin du second jour.

Combien y a-t-il de cas où exactement i rats meurent le premier jour ? La réponse est $\binom{n}{i}$. Le nombre de résultats possibles est donc de :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \times 2^{n-i} = 3^n$$

En comparant le nombre de résultats possibles au nombre de solutions différentes au problème on obtient $k \leq 3^n$ ce qui était le résultat annoncé.

Montrons maintenant qu'on peut discriminer 3^n bouteilles avec n rats et en deux jours. Pour cela, on va donner une méthode pour discriminer 3^n bouteilles avec n rats et en deux jours. On commence par diviser les bouteilles en $n+1$ groupes numérotés de 0 à n. Le premier groupe (numéro $k=0$) contient 2^n bouteilles. Le second groupe contient $n \times 2^{n-1}$ bouteilles réparties en n sous-groupes de 2^{n-1} bouteilles. Le groupe numéro k contient $\binom{n}{k} \times 2^{n-k}$ bouteilles réparties en $\binom{n}{k}$ sous-groupes de 2^{n-k} bouteilles. On vérifie que toutes les bouteilles sont utilisées car :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 2^{n-k} = 3^n$$

Aucun rat ne goûte de bouteilles du premier groupe. Pour le second groupe, chaque rat goûte toutes les bouteilles d'un sous-groupe : on a n rats et il y a n sous-groupes. Pour le groupe numéro k, chaque groupe de k rats possible goûte toutes les bouteilles d'un sous-groupe : il y a $\binom{n}{k}$ groupes de k rats et il y a $\binom{n}{k}$ sous-groupes. Le lendemain, si k rats sont morts, on sait que la bouteille empoisonnée se trouve dans le groupe numéro k et en regardant quel groupe de k rats est mort on sait aussi dans quel sous-groupe se trouve la bouteille empoisonnée. Ce sous-groupe contient 2^{n-k} bouteilles et il nous reste $n-k$ rats. On peut donc trouver la bouteille empoisonnée en un jour de plus en appliquant la méthode vue pour un jour.

Par récurrence, on montre que n rats permettent en q jours de discriminer $(q+1)^n$ bouteilles et qu'il n'est pas possible de faire mieux. Il suffit pour cela d'utiliser la même méthode en exploitant la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \times q^{n-i} = (q+1)^n$$

Pour conclure, s'il y a p bouteilles et qu'on a q jours, il faut et il suffit que le nombre n de rats vérifie $(q+1)^n \geq p$. Si l'on tient à avoir une formule, le nombre minimum de rats est

$$n = \left\lceil \frac{\ln(p)}{\ln(q+1)} \right\rceil$$

où $\lceil . \rceil$ désigne la partie entière par excès.

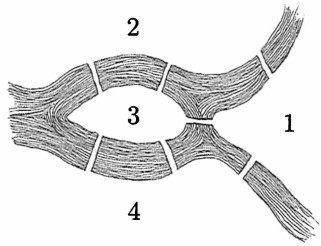
77 Tout tient au fait que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est dénombrable, c'est-à-dire que l'on dispose d'une bijection (voir le rappel 4)

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ k & \mapsto (\sigma_1(k), \sigma_2(k)) \end{cases}$$

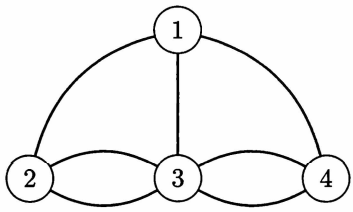
Si l'on connaît (m, p), on sait où est le robot au bout de k secondes : il est en $m + kp$. On va tester les couples (m, p) en demandant à chaque instant k si le robot est en $\sigma_1(k) + k \times \sigma_2(k)$

Vérifions que cette stratégie fonctionne. σ est une bijection, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(n) = (m, p)$. À la n-ième seconde, on va demander si le robot est en $m + np$, et il y sera effectivement. On remarque que le robot peut être trouvé avant la n-ième seconde et que lorsqu'on le trouve à l'instant k, rien ne prouve que $(m, p) = \sigma(k)$. On ne connaît donc ni sa position initiale, ni son pas, mais l'essentiel est qu'on l'ait trouvé.

78 On se convainc en essayant divers trajets qu'il n'y a pas de solution. C'est ce que nous allons démontrer. Pour cela, il faut utiliser un peu de théorie des graphes, créée spécialement par Euler pour ce problème. Cela est très astucieux mais reste très simple, l'idée étant de se ramener à un problème où l'on doit relier des points sans lever le crayon. On attribue pour cela à chaque région de la ville un numéro comme suit :



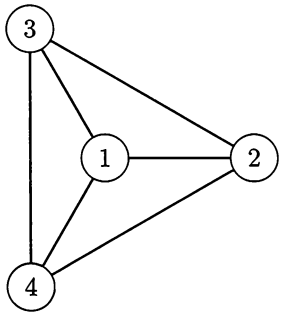
On relie par un trait deux régions lorsqu'il y a un pont entre elles, ce qui donne le graphe suivant :



On constate alors que trouver un chemin passant exactement une fois par chaque pont revient à trouver un chemin reliant les quatre sommets du graphe en suivant les arêtes sans lever le crayon. On se convainc en essayant que c'est impossible, mais encore faut-il le démontrer. Pour cela, on va utiliser la propriété suivante :

> Si un graphe peut être parcouru sans lever le crayon, alors il a au plus deux sommets comportant un nombre impair d'arêtes incidentes.

Considérons par exemple le graphe suivant :



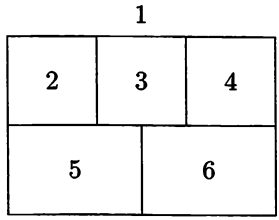
Sur les quatre sommets, il arrive trois arêtes : on dit que chaque sommet est de degré trois. Comme $4 > 2$, il est impossible de relier ce graphe sans lever le crayon.

Démontrons à présent la propriété. Soit un graphe que l'on suppose tracé sans lever le crayon. Il y a un sommet où l'on a commencé à le tracer, un sommet où l'on a fini de le tracer, ces deux sommets pouvant être éventuellement confondus. On constate que tous les autres sommets sont de degré pair : en effet, à chaque fois que l'on passe par un sommet, on augmente son degré de deux unités, ce qui le laisse de degré pair. Il n'y a bien au plus que deux sommets de degré impair.

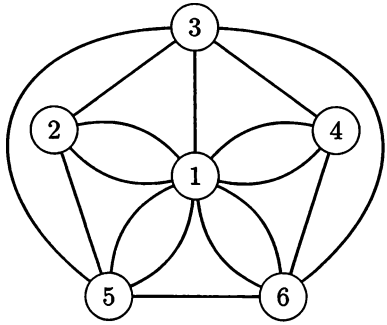
Revenons au problème des ponts. Tous les sommets du graphe ont un degré impair (3 pour les sommets 1, 2, 4 ; 5 pour le sommet 3). Il est donc impossible de les relier sans lever le crayon.

À noter que la réciproque de la propriété citée ci-dessus est vraie mais un peu plus délicate à prouver. L'équivalence ainsi obtenue constitue le théorème d'Euler (1736).

79 Encore une fois, il faut se ramener à un problème de graphes. On commence par attribuer à chaque partie du plan délimitée par des arêtes un numéro, comme ci-dessous :



On relie par un trait deux régions lorsqu'une arête les sépare, ce qui donne le graphe suivant :



Tracer un trait qui passe exactement une fois par chaque arête équivaut à trouver une façon de relier les six sommets du graphe en passant par les traits sans lever le crayon. Sur les sommets 1, 3, 5 et 6, le nombre de traits arrivant est impair, or la condition pour qu'on puisse relier les sommets suivant les traits sans lever le crayon est qu'il n'y ait pas plus de deux sommets où le nombre de traits est impair, c'est donc impossible (voir la correction de l'énigme précédente).

80 Les cartes sont numérotées de 0 à 123. Un spectateur choisit cinq cartes. Soit $c_0 < c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ leurs numéros. Bob choisit la carte c_k, avec $k \in \{0, ..., 4\}$ tel que $k \equiv c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \,[5]$. Soit s la somme des quatre cartes restantes modulo 5. $k \equiv s + c_k \,[5]$ donc $c_k \equiv k - s \,[5]$. Alice, prenant connaissance des quatre cartes, peut renuméroter les 120 autres cartes de 0 à 119. Ainsi, la carte choisie par Bob n'est plus congrue à $k - s$ modulo 5, mais à $-s$ modulo 5. En effet, k cartes plus petites ont été retirées donc son nouveau numéro est l'ancien moins k. Il y a exactement 24 cartes congrues à $-s$ modulo 5 parmi les 120. Comme il y a 24 façons d'ordonner les quatre cartes restantes, Bob a pu donner l'information supplémentaire (un nombre compris entre 1 et 24) à Alice,

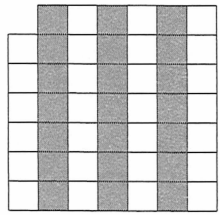
ce qui lui permet de conclure.

Donnons un exemple pour clarifier la méthode. Supposons qu'un spectateur ait choisi les cartes numéro 92, 118, 110, 95 et 8.

Encodage Bob commence par mettre les cartes dans l'ordre : 8, 92, 95, 110, 118. Il calcule leur somme modulo 5 : $3 + 2 + 0 + 0 + 3 = 8$, donc leur somme est congrue à 3 modulo 5. Il sélectionne par conséquent la carte 110. La somme des quatre cartes restantes modulo 5 est $s = 3$. En renumérotant les 120 cartes, la carte 110 devient la carte 107. $107 = 21 \times 5 + 2$. Bob utilise les quatre cartes pour coder 21, en les remettant dans l'ordre : 95, 118, 8, 92.

Décodage Alice prend connaissance des quatre cartes. En regardant l'ordre dans lequel elles se trouvent, elle en déduit que Bob a codé 21. De plus, leur somme vaut 3 modulo 5, donc le numéro de la carte mystère, dans la nouvelle numérotation de 0 à 119, est congru à 2 modulo 5. Comme Bob a codé 21, il vaut $21 \times 5 + 2 = 107$. Trois cartes parmi les quatre sont inférieures à 107, donc le vrai numéro de la carte mystère est 110.

81 C'est impossible. Supposons par l'absurde que l'on ait réussi à paver la salle de bain. On peint alors les carreaux comme suit :

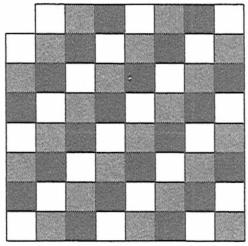


On constate qu'il y a 27 carreaux blancs et 21 carreaux gris. Chaque L recouvre trois carreaux blancs et un carreau gris ou l'inverse. Notons B le nombre de L recouvrant trois carreaux blancs et un carreau gris et G le nombre de L recouvrant trois carreaux gris et un carreau blanc. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3B + G &= 27 \\ B + 3G &= 21 \end{cases}$$

On résout ce système, la seule solution est $B = \frac{15}{2}$ et $G = \frac{9}{2}$ ce qui est absurde puisque B et G doivent être entiers. Contradiction.

82 C'est impossible. Supposons par l'absurde que l'on ait réussi à paver la salle de bain. On peint alors les carreaux comme suit :



On constate qu'il y a 22 carreaux blancs, 21 carreaux gris et 20 carreaux noirs. Or chaque domino allongé recouvre un carreau blanc, un carreau gris et un carreau noir. Il doit donc y avoir autant de carreaux blancs que de carreaux gris que de carreaux noirs. Contradiction.

83 C'est la maison 73 qui va recevoir son courrier en dernier. Calculons en toute généralité pour n maisons ($n \geq 2$) laquelle reçoit son courrier en dernier. Soit m_n le numéro de cette maison. En observant les petites valeurs de n ($m_2 = 1$, $m_3 = 3$, $m_4 = 1$, $m_5 = 3$,...) on peut constater que la suite augmente en ne prenant que des valeurs impaires jusqu'à n avant de retomber à 1. Il n'est pas facile d'expliciter cela sous la forme d'une formule. C'est parce que l'on est dans la mauvaise base : plaçons-nous plutôt en base 2 (voir le rappel 7). n s'écrit en base 2 $1b_{p-1}...b_0$, avec $p \geq 1$ et les b_i valant 0 ou 1. On va montrer, par récurrence sur $n \geq 2$, qu'en base 2 m_n s'écrit $b_{p-1}...b_0 1$.

Initialisation. Pour $n = 2 : 2 = 10_2$ (10_2 signifie 10 en base 2), $m_n = 1 = 01_2$. C'est également vrai pour $n = 3 : 3 = 11_2$ et $m_3 = 3 = 11_2$.

Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 3$ et montrons-la au rang $n + 1$. Le facteur distribue le courrier à la maison 2. Il doit le distribuer ensuite aux n maisons restantes. On peut se servir de l'hypothèse de récurrence si l'on renumérote au préalable les maisons restantes comme suit :

1	2	3	4	···	n	$n+1$
n	×	1	2	···	$n-2$	$n-1$

La maison numéro 3 devient la maison numéro 1, la 4 devient la 2, ..., la $n + 1$ devient la $n - 1$ et la 1 devient la n.

Si $m_n = n$, étant donné la renumérotation effectuée, $m_{n+1} = 1$. Par unicité de la décomposition en base 2, $b_0 = 1$, $b_1 = b_0$, ..., $b_{p-1} = b_{p-2}$,

et donc $n = 1...1_2$. Dans ce cas-là, $n+1 = 10...0_2$, et la propriété de récurrence est vraie : $m_{n+1} = 1$.

Sinon, $m_n \neq n$, et, étant donné la numérotation, $m_{n+1} = m_n + 2$.

$$n = 2^p + \sum_{i=0}^{p-1} b_i 2^i$$

$n+1$ n'a pas plus de chiffres en base 2 que n, sinon $n = 1...1_2 = m_n$, ce qui est exclu.

$$n+1 = 2^p + \sum_{i=0}^{p-1} B_i 2^i$$

avec les B_i valant 0 ou 1.

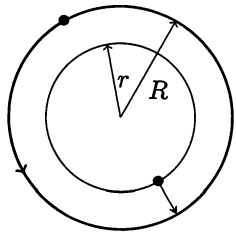
$$B_{p-1}...B_0 1_2 = \sum_{i=0}^{p-1} B_i 2^{i+1} + 1$$

$$B_{p-1}...B_0 1_2 = 2\left(\sum_{i=0}^{p-1} b_i 2^i + 1\right) + 1$$

$$B_{p-1}...B_0 1_2 = \left(2\sum_{i=0}^{p-1} b_i 2^i + 1\right) + 2$$

Ainsi $B_{p-1}...B_0 1_2 = b_{p-1}...b_0 1_2 + 2 = m_n + 2 = m_{n+1}$ ce qui achève la récurrence. $100 = 1100100_2$, d'où $m_{100} = 1001001_2 = 73$ comme annoncé.

84 Commençons par établir une stratégie qui n'est pas optimale mais qui est déjà meilleure que celle proposée dans l'énoncé. Notons R le rayon du lac, v la vitesse du chien et v' celle du vacancier. Considérons le disque de rayon $r = \frac{v'}{v}R$. Tant que le vacancier reste à l'intérieur de ce disque, sa vitesse angulaire maximale est plus grande que la vitesse angulaire du chien. En d'autres termes, lorsque le vacancier se déplace sur un cercle de rayon inférieur à r, il tourne plus vite que le chien. En raisonnant dans le cas limite, il peut après un certain nombre de tours se placer sur le cercle de rayon r avec le chien placé à l'autre extrémité. Maintenant, le vacancier part tout droit vers le rivage :



Il parcourt la distance $R - r = R\left(1 - \frac{v'}{v}\right)$ ce qui lui prend le temps

$$t' = \frac{R(1 - \frac{v'}{v})}{v'} = R\left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v}\right)$$

tandis que le chien parcourt la distance πR ce qui lui prend le temps

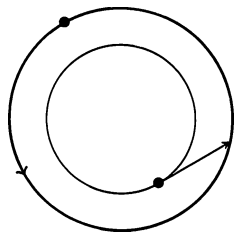
$$t = \frac{\pi R}{v}$$

Pour que le vacancier puisse échapper au chien, on doit avoir $t' < t$, d'où une vitesse limite

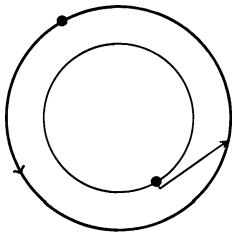
$$v' = \frac{v}{1 + \pi}$$

Comme annoncé, cette vitesse limite est inférieure à celle proposée dans l'énoncé $\frac{v}{\pi}$, cette stratégie est donc meilleure.

Passons maintenant à la stratégie optimale. Comme précédemment, le vacancier se place sur le cercle de rayon r avec le chien placé à l'autre extrémité, mais au lieu de s'échapper tout droit, il prend la tangente au cercle :



Toujours en raisonnant dans le cas limite, on peut supposer que le chien part dans la mauvaise direction comme sur le schéma. En effet, le vacancier peut partir perpendiculairement au cercle (comme dans la première stratégie) pendant un très cours intervalle de temps, regarder dans quel sens part le chien, puis prendre la tangente dans le sens opposé :



Dès que le vacancier quitte le disque de rayon r, la vitesse angulaire du chien est toujours supérieure donc le chien ne peut plus faire demi-tour.

Il parcourt la distance $\sqrt{R^2 - r^2}$ ce qui lui prend le temps

$$t' = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{v'}$$

tandis que le chien parcourt la distance $\pi\,(R + \alpha)$ ce qui lui prend le temps

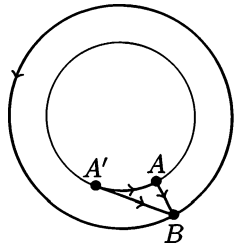
$$t = \frac{\pi\,(R + \alpha)}{v}$$

Pour que le vacancier puisse échapper au chien, on doit avoir $t' < t$. En posant $x = \frac{r}{R} = \frac{v'}{v}$, on obtient après quelques transformations la condition suivante :

$$\left(1 + (\pi + \arccos(x))^2\right) x^2 = 1$$

On ne peut pas avoir l'expression exacte de x, mais en confiant le calcul à un logiciel adapté on obtient $x \simeq 0.217$. Cela est mieux qu'avec la stratégie précédente car $\frac{1}{1+\pi} \simeq 0.241$. Il reste à montrer que cette stratégie est optimale.

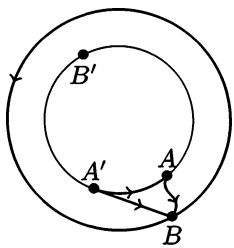
Cette démonstration peut se faire sans calcul. Retrouvons tout d'abord que la stratégie de prendre la tangente est meilleure que celle consistant à partir perpendiculairement au cercle. Si le vacancier part du point A au point B perpendiculairement au cercle comme dans la première stratégie, on peut supposer qu'il part en fait du point A', va au point A puis au point B. Cela ne change rien : le chien reste diamétralement opposé au vacancier lorsque ce dernier va de A' à A. Mais pour aller du point A' au point B, la plus courte distance est la ligne droite, donc la tangente. La méthode de la tangente permet donc au vacancier de sortir plus rapidement.



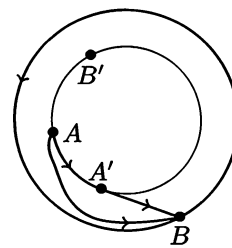
Prenons maintenant une stratégie (S) quelconque permettant au vacancier de s'échapper et montrons que la stratégie (T) de prendre la tangente est meilleure. Avec (S), le vacancier quitte le disque de rayon r en un point A et arrive en un point B. Quitte à améliorer (S), on peut toujours supposer que lorsque le vacancier est en A le chien est à l'opposé. Par symétrie, on peut toujours supposer que le chien va dans le sens trigonométrique. En introduisant le point B', opposé à B mais sur le cercle de rayon r, on peut distinguer deux cas :

— Si A est dans la portion droite du cercle, entre A' et B', on fait le même raisonnement que précédemment : on peut supposer qu'en fait (S) part de A'.

— Sinon, on peut supposer qu'en fait (T) part de A. Cela ne modifie pas (T) mais permet de la comparer à (S).



Premier cas



Deuxième cas

Dans tous les cas, on voit que la stratégie (T) permet de sortir plus vite que la stratégie (S) : c'est la meilleure stratégie.

85 Une stratégie naturelle consiste à se fixer un seuil à partir duquel on s'estime content, par exemple 100 euros, et d'encaisser le premier chèque s'il est supérieur à 100 euros, d'encaisser l'autre sinon.

Si les deux montants M_1 et M_2 choisis par le banquier sont tous les deux inférieurs à 100 euros, cette stratégie va conduire le client à changer

d'enveloppe systématiquement. Il gagnera donc en moyenne $\frac{M_1+M_2}{2}$. Si les deux montants M_1 et M_2 choisis par le banquier sont tous les deux supérieurs à 100 euros, cette stratégie va conduire le client à ne jamais changer d'enveloppe. Il gagnera donc en moyenne $\frac{M_1+M_2}{2}$. Enfin, si $M_1 < 100 < M_2$ ou l'inverse, cette stratégie va permettre au client de toujours choisir l'enveloppe qui contient le plus grand montant.

Finalement, la stratégie qui consiste à se fixer un seuil à partir duquel on s'estime content est une bonne stratégie lorsque le seuil choisi est entre les deux montants du banquier et n'est pas efficace sinon. Si on fixe le seuil arbitrairement, il se peut qu'on ne tombe pas entre les deux montants et que la stratégie ne soit pas efficace. Pour éviter cet écueil, il faut choisir aléatoirement le seuil, avec une variable aléatoire X telle que

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2, a < b \Rightarrow \mathbb{P}(X \in [a,b]) > 0$$

X est une variable aléatoire qui a une probabilité non nulle d'appartenir à n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}^*$ (une loi exponentielle par exemple).

De cette manière, le client choisit le seuil à partir duquel il s'estime content avec la variable aléatoire X et il sait que dans certains cas le seuil choisi sera entre les deux montants du banquier. Dans tous ces cas, il fait mieux que $\frac{M_1+M_2}{2}$. Son gain moyen est donc strictement supérieur à $\frac{M_1+M_2}{2}$.

On peut calculer le gain moyen G en fonction de M_1, de M_2 et de $p = \mathbb{P}(X \in [M_1, M_2])$:

$$G = p \times \max(M_1, M_2) + (1-p) \times \left(\frac{M_1+M_2}{2}\right)$$

86 Reprenons le raisonnement du banquier : "Soit x le montant de l'enveloppe de gauche (on ne connaît pas x car elle n'a pas été ouverte). Le montant de l'enveloppe de droite a une chance sur deux d'être $2x$, une chance sur deux d'être $\frac{x}{2}$, ainsi en moyenne l'enveloppe de droite contient

$$\frac{1}{2} \times 2x + \frac{1}{2} \times \frac{x}{2} = \frac{5}{4}x > x$$

il est donc bénéfique de changer d'enveloppe !"

L'erreur est que le montant de l'enveloppe de droite n'a pas forcément une chance sur deux d'être $2x$, ni une chance sur deux d'être $\frac{x}{2}$. Bien qu'il y ait toujours un certain montant dans une enveloppe et le double dans l'autre, il faut faire des probabilités conditionnelles : on se place ici conditionnellement à l'événement "la première enveloppe contient le

montant x" et cet événement change les probabilités d'avoir $2x$ et $\frac{x}{2}$ dans l'autre enveloppe.

Prenons un exemple simple : supposons que le banquier choisisse un premier montant aléatoirement entre 1 et 100, que le deuxième montant soit le double du premier et qu'il répartisse ces deux montants dans les enveloppes aléatoirement. La probabilité que l'autre enveloppe contienne $2x$ si la première contient $x = 200$ est nulle.

Montrons qu'il ne peut pas exister de loi de probabilité discrète telle que le montant de l'enveloppe de droite ait toujours une chance sur deux d'être $2x$, une chance sur deux d'être $\frac{x}{2}$ et ce quel que soit le montant x de l'enveloppe de gauche.

Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ avec les probabilités $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, p_k \in [0,1] \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$$

Soit ϵ une variable aléatoire, indépendante de X, à valeur dans $\{1,2\}$ et telle que :

$$\mathbb{P}(\epsilon = 1) = \mathbb{P}(\epsilon = 2) = \frac{1}{2}$$

On modélise les montants des enveloppes 1 et 2 par les variables aléatoires E_1 et E_2 définies par :

$$E_1 = \epsilon \times X \quad \text{et} \quad E_2 = (3 - \epsilon) \times X$$

Ainsi, quand $\epsilon = 1$, $E_1 = X$ et $E_2 = 2X$ et quand $\epsilon = 2$, $E_1 = 2X$ et $E_2 = X$.

Selon le banquier, la probabilité que le montant dans l'enveloppe de droite E_2 soit égal à $2x$ sachant que le montant de l'enveloppe de gauche E_1 est x est égale à la probabilité que le montant dans l'enveloppe de droite soit égal à $\frac{x}{2}$ sachant que celui de l'enveloppe de gauche est x, il suppose donc que :

$$\mathbb{P}(E_2 = 2x | E_1 = x) = \mathbb{P}\left(E_2 = \frac{x}{2} | E_1 = x\right)$$

donc

$$\frac{\mathbb{P}(E_2 = 2x, E_1 = x)}{\mathbb{P}(E_1 = x)} = \frac{\mathbb{P}\left(E_2 = \frac{x}{2}, E_1 = x\right)}{\mathbb{P}(E_1 = x)}$$

$$\mathbb{P}(E_2 = 2x, E_1 = x) = \mathbb{P}\left(E_2 = \frac{x}{2}, E_1 = x\right)$$

Or

$$\mathbb{P}(E_2 = 2x, E_1 = x) = \mathbb{P}(\epsilon = 1, X = x)$$

et les variables ϵ et X sont indépendantes donc

$$\mathbb{P}(\epsilon = 1, X = x) = \mathbb{P}(\epsilon = 1) \times \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X = x)$$

De même,

$$\mathbb{P}\left(E_2 = \frac{x}{2}, E_1 = x\right) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}\left(X = \frac{x}{2}\right)$$

donc

$$\frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X = 2x)$$

ce qui contredit $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

87 Il y a deux façons de faire. Soit on généralise à des poids quelconques le résultat déjà établi pour les entiers, soit on raisonne directement sur des poids quelconques avec un calcul matriciel. Ces deux méthodes nécessitent à chaque fois l'utilisation des espaces vectoriels.

Première méthode Commençons par supposer que les poids sont rationnels. On se ramène d'abord à des rationnels positifs en ajoutant à tous les poids un nombre suffisamment grand, puis en multipliant tous les poids par le produit des dénominateurs, on est ramené au cas entier, déjà résolu dans l'énigme 63.

Le passage au cas des poids réels est beaucoup plus subtil. L'idée est de considérer $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. La famille des onze poids $(x_1, \ldots, x_{11})$ devient donc une famille de onze vecteurs. Soit E l'espace vectoriel engendré par ces onze vecteurs et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E (on ne connaît pas la dimension n de E, on a juste $n \leq 11$). Pour tout $i \in \{1, \ldots, 11\}$, il existe donc $\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,n} \in \mathbb{Q}$ tels que

$$x_i = \lambda_{i,1} e_1 + \cdots + \lambda_{i,n} e_n$$

Par liberté de $(e_1, \ldots, e_n)$, chaque famille $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq 11}$ est une distribution de poids vérifiant la propriété repérée par l'écureuil. Comme ces poids sont rationnels, on peut conclure qu'ils sont tous égaux, et ce pour tout j entre 1 et n. Ainsi tous les x_i sont égaux.

Deuxième méthode Considérons une distribution qui fonctionne. On note X le vecteur de $\mathbb{R}^{11}$ représentant les poids des noisettes. La condition sur ces poids s'écrit $MX = 0$ avec $M \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R})$ ayant des 0 sur la diagonale et cinq 1, cinq -1 par ligne. Soit H le vecteur de $\mathbb{R}^{11}$ n'ayant pour coordonnées que des 1. On constate que $MH = 0$ donc $H \in \ker(M)$. Montrons que $\ker(M)$ est de dimension 1. D'après le théorème du rang, il suffit de montrer que M est de rang 10. Pour cela, considérons M' la sous-matrice de taille 10 supérieure gauche de M.

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \pm 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \pm 1 \\ \pm 1 & \cdots & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il suffit de calculer la parité du déterminant pour vérifier qu'il est non nul. Compte tenu de la formule du déterminant et la compatibilité de la congruence avec l'addition et la multiplication,

$$\det(M') \equiv \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} [2]$$

Notons D ce dernier déterminant. Il se calcule simplement par des combinaisons sur les lignes et les colonnes. En soustrayant la première colonne aux autres,

$$D = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

puis, en additionnant à la première ligne toutes les autres lignes,

$$D = \det \begin{pmatrix} 9 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} = 9 \times (-1)^9$$

Ainsi, $D \equiv 1\,[2]$, la matrice est donc bien de rang 10, et $\ker(M)$ est de dimension 1. Comme $X \in \ker(M)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $X = \alpha H$. Tous les poids sont bien égaux.

88 $t_1 > t_2$: en moyenne, il faut attendre plus de temps pour taper "abracadabra" que "abracadabrx". La différence entre les deux temps moyens provient du fait que lorsque le singe arrive à "abracadabr", s'il doit taper "abracadabra", soit il tape "a" et c'est gagné, soit il tape une autre lettre et repart à zéro, tandis que s'il doit taper "abracadabrx", soit il tape "x" et c'est gagné, soit il tape une autre lettre, mais il peut rater le "x" sans retomber à zéro en faisant "a" : il repart alors de "abra". Sans être totalement rigoureux, ce raisonnement permet de conjecturer $t_1 > t_2$.

Pour calculer t_1, on va procéder de manière analogue à celle de l'énigme 50. Définissons les onze étapes suivantes :

Étape	le singe a tapé...
0	xxx
1	xxxa
2	xxxab
3	xxxabr
4	xxxabra
5	xxxabrac
6	xxxabraca
7	xxxabracad
8	xxxabracada
9	xxxabracadab
10	xxxabracadabr

L'étape 0 correspond à l'état où le singe "part de zéro", par exemple s'il a tapé "jhusdqabracadakdf". L'étape 1 correspond à l'état où le singe part de la lettre "a", par exemple s'il a tapé "jhusdqabracadakdfa".

Soit $T_0, ..., T_{10}$ les temps moyens pour obtenir "abracadabra" en partant respectivement des étapes 0,...,10. On cherche T_0 car $T_0 = t_1$.

Lorsque le singe est à l'étape 0, soit il tape "a" et passe à l'étape 1, soit il tape une autre lettre et reste à l'étape 0. S'il tape "a", il passe à un temps moyen de T_1, donc son temps moyen d'obtention est de $T_1 + 1$ car il a tapé une lettre de plus. S'il tape une autre lettre, il a un temps moyen T_0, donc, depuis son étape de $T_0 + 1$. Ainsi,

$$T_0 = \frac{1}{26}(T_1 + 1) + \frac{25}{26}(T_0 + 1)$$

Posons $p = \frac{1}{26}$. En effectuant le même raisonnement à chaque étape, on obtient finalement les onze relations suivantes :

$$\begin{aligned}
T_0 &= pT_1 + (1-p)T_0 + 1 \\
T_1 &= pT_2 + pT_1 + (1-2p)T_0 + 1 \\
T_2 &= pT_3 + pT_1 + (1-2p)T_0 + 1 \\
T_3 &= pT_4 + (1-p)T_0 + 1 \\
T_4 &= pT_5 + pT_2 + pT_1 + (1-3p)T_0 + 1 \\
T_5 &= pT_6 + (1-p)T_0 + 1 \\
T_6 &= pT_7 + pT_2 + pT_1 + (1-3p)T_0 + 1 \\
T_7 &= pT_8 + (1-p)T_0 + 1 \\
T_8 &= pT_9 + pT_1 + (1-2p)T_0 + 1 \\
T_9 &= pT_{10} + pT_1 + (1-2p)T_0 + 1 \\
T_{10} &= (1-p)T_0 + 1
\end{aligned}$$

On ne va pas détailler la résolution de ce système linéaire... Le mieux est de la confier à un logiciel de calcul. Le temps moyen d'attente est

$$t_1 = 3\,670\,344\,487\,444\,778\,\text{s}$$

Pour calculer t_2, seule la dernière relation est modifiée :

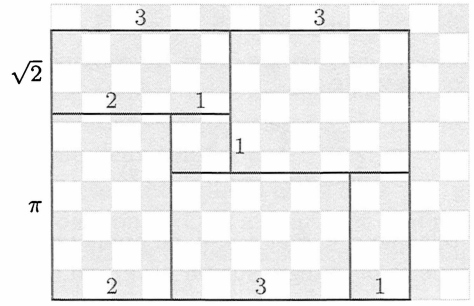
$$T_{10} = pT_4 + (1-2p)T_0 + 1$$

On obtient ainsi

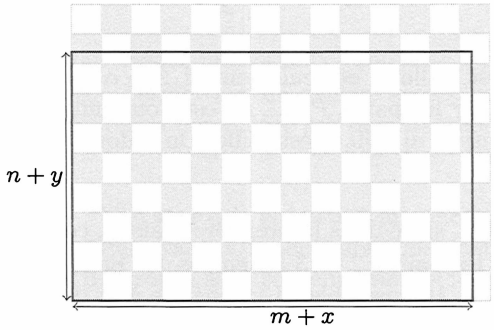
$$t_2 = 3\,670\,344\,486\,987\,776\,\text{s}$$

$t_1 - t_2 = 457\,002\,\text{s}$: on a bien $t_1 > t_2$.

89 Considérons un pavage noir et blanc (ou plutôt gris et blanc pour la lisibilité) d'origine le coin inférieur gauche du grand rectangle, constitué de carreaux de côté $\frac{1}{2}$. Dans l'exemple de l'énoncé, cela donne :



Un peu d'attention montre que tout rectangle ayant un côté entier contient autant de noir que de blanc. Le grand rectangle contient donc autant de noir que de blanc. Supposons par l'absurde qu'aucun de ses côtés ne soit entier. Il est donc de la forme :



avec m, n deux entiers et $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. En retirant autant de noir que de blanc, on voit que le plus petit rectangle ci-dessous doit contenir autant de blanc que de noir :

On montre facilement que cela est impossible, d'où la contradiction.

Le lecteur familier avec le théorème de Fubini appréciera sûrement la méthode suivante, qui a l'avantage d'être facilement généralisable en dimension quelconque. On assimile le grand rectangle au pavé $[0, a] \times [0, b]$ de $\mathbb{R}^2$, le but est de montrer que a ou b est entier, sachant que l'on peut partitionner $[0, a] \times [0, b]$ en n pavés $P_1, ..., P_n$ ayant chacun au moins un

côté de longueur entière.

Soit F la fonction suivante :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto e^{2i\pi(x+y)} \end{cases}$$

Pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$, en appliquant le théorème de Fubini (F est continue et on intègre sur un pavé), on obtient :

$$\iint_{[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_\alpha^\beta e^{2i\pi x}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_\gamma^\delta e^{2i\pi y}\,\mathrm{d}y\right)$$

$$\iint_{[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{e^{2i\pi\beta} - e^{2i\pi\alpha}}{2i\pi} \times \frac{e^{2i\pi\delta} - e^{2i\pi\gamma}}{2i\pi}$$

Cette intégrale est nulle si et seulement si $\beta - \alpha$ ou $\delta - \gamma$ est entier. L'intégrale de F sur les pavés $P_1, ..., P_n$ est donc nulle, et par linéarité, l'intégrale de F sur $[0, a] \times [0, b]$ est nulle. On a donc a ou b entier.

90 L'électricien, situé dans la première maison, commence par relier avec les dominos les points 2 et 3 ensemble, les points 4, 5, 6 ensemble et les points 7, 8, 9, 10 ensemble. Il va ensuite à la deuxième maison. Il branche la batterie sur le point A et la lampe sur le point B, puis sur le point C et ainsi de suite jusqu'au point J. Cela lui permet d'identifier des groupes. Si, par exemple, la lampe ne s'allume pas, c'est que le point A correspond au point 1, si la lampe s'allume uniquement sur le point C, c'est que les points A/C correspondent aux points 2/3, etc. En faisant tous les tests possibles, c'est-à-dire en plaçant la batterie sur tous les points possibles et en testant avec la lampe tous les autres, il détermine à quels groupe de points correspondent les groupes 1, 2/3, 4/5/6, 7/8/9/10. Quitte à renommer les points, on peut supposer qu'ils correspondent aux groupes A, B/C, D/E/F, G/H/I/J.

Avant de repartir, il relie les points A/B/D/G ensemble, les points C/E/H ensemble, les points F/I ensemble et laisse le point J seul. Il revient à la première maison, fait les mêmes tests et retrouve toutes les correspondances. Si par exemple les points 1/2/6/8 correspondent aux points A/B/D/G, alors il en déduit que le point 1 correspond au point A (il le savait déjà), que le point 2 correspond au point B, que le point 6 correspond au point D et que le point 8 correspond au point G.

91 Si on divise la classe en deux groupes, il y aura dans chaque groupe un certain nombre de relations de connaissance au sein de ce groupe. Considérons le nombre total de relations de connaissance, c'est-à-dire le nombre de relations de connaissance du premier groupe plus le nombre de relations du deuxième groupe.

Si un élève a (strictement) plus d'amis dans son groupe que dans l'autre, on le change de groupe. Cela a pour effet de diminuer strictement le nombre total de relations de connaissance. Ce nombre ne peut pas diminuer éternellement, il y aura donc un moment où aucun élève n'aura plus d'amis dans son groupe que dans l'autre.

Notons que cette même démonstration peut être présentée de manière non constructive. Comme il n'y a qu'un nombre fini de dispositions en deux groupes possibles, il existe une disposition où le nombre total de relations est minimal. Cette disposition convient clairement.

92 Après différents essais infructueux, on peut conjecturer qu'il n'existe pas de stratégie permettant de gagner avec plus d'une chance sur deux. C'est ce que l'on va démontrer par deux méthodes différentes.

Première méthode Une stratégie consiste à annoncer rouge selon les cartes que l'on a vu passer avant. On peut ainsi imaginer des stratégies alambiquées, du type "dire rouge a la troisième carte si les deux premières cartes sont 2♡, 3♢, sinon dire rouge à la quatrième". Comment prendre en compte toutes les stratégies possibles ? Il nous faut pour cela imaginer un gigantesque tableau, de 52! lignes et 52 colonnes, les lignes représentant les configurations possibles du jeu de cartes.

10♢ V♠ 3♣	5♡ 2♠ 1♣
⋮	
7♡ 4♠ 9♡	2♣ 8♢ R♢

Quand on mélange un jeu de cartes, on est sûr de tomber sur une ligne du tableau, et chaque ligne du tableau peut être obtenue. Supposons que l'on dispose d'une stratégie. Ce tableau permet de l'expliciter, il suffit pour cela de tracer un trait à chaque fois que, vu les cartes dévoilées, la stratégie indique d'annoncer "rouge".

$$
\begin{array}{lll}
10\diamondsuit\ V\spadesuit \mid 3\clubsuit & & 5\heartsuit\ 2\spadesuit\ 1\clubsuit \\
8\spadesuit\ 1\diamondsuit\ 10\clubsuit & K\clubsuit \mid D\spadesuit & 8\clubsuit\ 9\heartsuit\ 9\diamondsuit \\
\vdots & & \\
7\heartsuit\ 4\spadesuit\ 9\heartsuit & 10\heartsuit \mid 3\spadesuit & 2\clubsuit\ 8\diamondsuit\ R\diamondsuit
\end{array}
$$

Notons que si une ligne du tableau contient un trait, par exemple après les deux premières cartes dix de carreaux et valet de pique (comme sur l'exemple), toutes les autres lignes du tableau commençant par les deux mêmes cartes doivent avoir un trait au même endroit. On est gagnant si et seulement si la carte après le trait est rouge. Comme les 52! configurations possibles sont équiprobables, la probabilité de gagner est le nombre de lignes où la carte après le trait est rouge divisé par le nombre total de lignes (52!). Il s'agit donc de montrer qu'il y a autant de lignes où le trait précède une carte rouge que de lignes où le trait précède une carte noire. Pour cela, modifions le tableau en inversant à chaque ligne la carte suivant le trait avec la dernière carte de la ligne. Ainsi, la configuration

$$
\begin{array}{lll}
7\heartsuit\ 4\spadesuit\ 9\heartsuit & 10\heartsuit \mid 3\spadesuit & 2\clubsuit\ 8\diamondsuit\ R\diamondsuit
\end{array}
$$

devient

$$
\begin{array}{lll}
7\heartsuit\ 4\spadesuit\ 9\heartsuit & 10\heartsuit \mid R\diamondsuit & 2\clubsuit\ 8\diamondsuit\ 3\spadesuit
\end{array}
$$

On pourrait croire que l'on a profondément modifié le tableau, mais en fait on n'a fait que réordonner les lignes ! En effet, la transformation effectuée sur les lignes est une bijection puisque c'est une application injective (si deux lignes donnent la même nouvelle ligne, ces deux lignes étaient les mêmes) et surjective (pour toute ligne, il existe une ligne qui devient une fois transformée cette ligne). Ainsi le nombre de lignes où le trait précède une carte rouge est égal au nombre de nouvelles lignes où le trait précède une carte rouge, c'est-à-dire au nombre de lignes où la dernière carte est rouge, c'est-à-dire $\frac{52!}{2}$. D'où le résultat.

Deuxième méthode Démontrons par récurrence que toutes les stratégies sont équivalentes : on a toujours une chance sur deux quoi qu'on fasse. De manière plus générale, on va montrer que pour un paquet de N cartes comprenant N_r cartes rouges, toutes les stratégies sont équivalentes et qu'elles donnent toutes la même probabilité $p = \frac{N_r}{N}$. En particulier pour un jeu de cartes standard, on retrouve la probabilité $p = \frac{1}{2}$ annoncée.

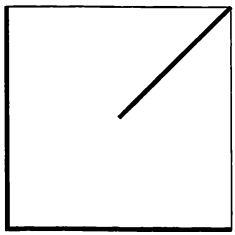
La récurrence se fait sur le nombre total de cartes du paquet. L'initialisation est évidente pour les paquets d'une seule carte. Pour l'hérédité, on considère $N \geq 1$ un entier et on suppose que pour tout paquet de N cartes comprenant N_r cartes rouges (avec N_r quelconque dans $\{0, ..., N\}$) toutes les stratégies sont équivalentes et qu'elles donnent toutes la même probabilité $p = \frac{N_r}{N}$. On considère maintenant un paquet de $N+1$ cartes avec N_r cartes rouges et une stratégie quelconque. De deux choses l'une : soit la stratégie annonce directement rouge et dans ce cas-là probabilité est bien de $p = \frac{N_r}{N+1}$, soit la stratégie laisse passer la première carte.

Dans le deuxième cas on se retrouve avec un paquet de N cartes. Si la carte passée est rouge (ce qui arrive avec la probabilité $\frac{N_r}{N+1}$) on obtient une probabilité de $\frac{N_r-1}{N}$, si la carte passée est noire (ce qui arrive avec la probabilité $\frac{N-N_r+1}{N+1}$) on obtient une probabilité de $\frac{N_r}{N}$. Au final, la probabilité cherchée est :

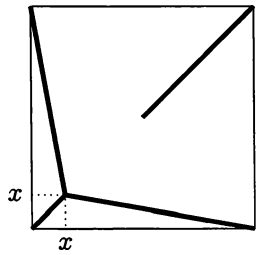
$$p = \left(\frac{N_r}{N+1}\right) \times \left(\frac{N_r-1}{N}\right) + \left(\frac{N-N_r+1}{N+1}\right) \times \left(\frac{N_r}{N}\right) = \frac{N_r}{N+1}$$

ce qui achève la récurrence.

93 Tout d'abord, il n'est pas évident de trouver comment faire moins de $2\sqrt{2}$ (on adimensionnalise les distances). Cela est possible en creusant suivant deux côtés, plus la moitié de la diagonale, comme ci-dessous :



On se convainc facilement qu'on est ainsi sûr de trouver le câble. La longueur des tranchées est $\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \simeq 2.71$, ce qui est mieux, mais ne répond pas encore à la question. On va modifier légèrement la configuration comme suit :



x est compris entre 0 et 0.5, et il s'agit de l'optimiser afin de rendre la longueur totale des tranchées minimale. La longueur totale des tranchées est

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{(1-x)^2 + x^2} + x\sqrt{2}$$

Pour trouver le minimum de f, on peut la dériver :

$$f'(x) = 2\frac{2x-1}{\sqrt{(1-x)^2 + x^2}} + \sqrt{2}$$

Cette dérivée s'annule lorsque

$$4x - 2 + \sqrt{2}\sqrt{(1-x)^2 + x^2} = 0$$

ce qui implique

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$$

Sans même prouver que f atteint effectivement son minimum en $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$, on peut tester la configuration obtenue pour $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$. On obtient une longueur totale de câble

$$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}} \simeq 2.639 < 2.64$$

Le problème est résolu.

On peut se demander si la configuration trouvée est optimale. Intuitivement, cela paraît assez clair, cependant c'est à ce jour un problème ouvert. Il a été posé par le mathématicien polonais Stefan Mazurkiewicz (1888 - 1945), dans le cas non pas d'un carré mais d'un polygone quelconque[3]. Depuis, la seule borne inférieure trouvée est 2, bien que tout le

3. Voir l'article wikipédia `http://en.wikipedia.org/wiki/Opaque_forest_problem` pour plus d'informations.

monde soit convaincu que la solution est $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}}$. Il semblerait cependant qu'en 2013, cette minoration ait été améliorée[4] : on est passé de 2 à $2+10^{-12}$... Bien maigre progrès, qui montre la difficulté du problème !

94 Le bilan porte sur au plus 11 mois. Montrons tout d'abord que le bilan ne peut pas porter sur plus de 12 mois. On raisonne par l'absurde et on note $c_1, c_2, ..., c_{12}$ les chiffres d'affaires sur les mois $1, 2, ..., 12$. Considérons la somme des valeurs suivantes :

$$\begin{array}{cccccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} \end{array}$$

La somme de chaque ligne représente les profits (algébriques, c'est-à-dire les chiffres d'affaires) sur une période de huit mois consécutifs, donc est strictement positive. La somme de chaque colonne représente les profits sur une période de cinq mois consécutifs donc est strictement négative. Ainsi, en sommant suivant les lignes, la somme de tous les termes du tableau ci-dessus est strictement positive, mais elle est aussi strictement négative, en sommant suivant les colonnes. Il y a une contradiction, il est donc impossible que le bilan porte sur plus de 11 mois.

Le bilan peut porter sur 11 mois si on considère la séquence de gains - pertes suivante :

$$5, -8, 5, 5, -8, 5, -8, 5, 5, -8, 5$$

Dans le cas général, avec p, q premiers entre eux, le bilan porte au plus sur $p+q-2$ mois. On montre comme dans le cas $p=5, q=8$ que le bilan ne peut pas porter sur plus de $p+q-2$ mois. En effet, on peut raisonner par l'absurde et écrire les profits en un tableau comme précédemment :

$$\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_q \\ c_2 & c_3 & c_{q+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_p & c_{p+1} & c_{p+q-1} \end{array}$$

4. Adrian Dumitrescu et Minghui Jianghttp, "The opaque square", `http://arxiv.org/abs/1311.3323`, 2013.

En sommant suivant les lignes, puis suivant les colonnes, on obtient la même contradiction. Il reste à montrer que le bilan peut porter sur $p+q-2$ mois.

Supposons que l'on ait $c_1, c_2, ..., c_{p+q-2}$ donnés, trouvons une condition nécessaire et suffisante sur les c_i pour que la condition sur les profits soit respectée. Posons $s_0 = 0$ et pour $1 \leq k \leq p+q-2$ notons

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} c_i$$

Supposons vérifiée la condition sur les profits. Pour $0 \leq k \leq p-2$, on a $s_{k+q} - s_k > 0$ car c'est une somme de q profits consécutifs. De même, pour $0 \leq k \leq q-2$, $s_{k+p} - s_k < 0$. Il est clair que cette condition sur les s_k est suffisante. Remarquons que l'on peut construire les s_k comme on le veut, il sera toujours possible de trouver des c_k correspondant en prenant $c_k = s_k - s_{k-1}$.

Voyons comment cela peut permettre d'exhiber un exemple dans le cas particulier $p = 5, q = 8$. On a nécessairement $s_7 < s_2 < s_{10} < s_5 < s_0 < s_8 < s_3 < s_{11} < s_6 < s_1 < s_9 < s_4$. Pour vérifier ces conditions, on peut assigner aux s_k les valeurs suivantes :

s_7	s_2	s_{10}	s_5	s_0	s_8	s_3	s_{11}	s_6	s_1	s_9	s_4
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

Ainsi, les s_k vérifient les inégalités écrites ci-dessus. De plus, toutes les inégalités du type $s_k < s_{k+q}$ et $s_{k+p} < s_k$ ont été écrites. Ainsi, les c_k associés aux s_k vérifient bien la condition des profits. D'ailleurs, on a ainsi formé le même exemple que précédemment : $5, -8, 5, 5, -8, 5, -8, 5, 5, -8, 5$.

Tâchons d'adapter cette méthode au cas général. On supposera sans perte de généralité que $p < q$. Comme précédemment, montrons que les $p+q-2$ inégalités de type $s_k < s_{k+q}$ ou $s_{k+p} < s_k$ impliquent un certain classement des s_k et que réciproquement ce classement implique ces inégalités. Cela suffit pour conclure : il ne reste plus qu'à assigner à chaque s_k l'entier représentant son rang dans le classement, ainsi les s_k vérifient les $p+q-2$ inégalités et les c_k associés aux s_k vérifient bien la condition des profits.

Sens direct On suppose les $p+q-2$ inégalités de type $s_k < s_{k+q}$ ou $s_{k+p} < s_k$ vérifiées, il s'agit de classer les s_k. Tout d'abord, le plus petit des s_k est forcément s_{q-1}. En effet, pour tout entier m dans $\{0, \ldots, p+$

$q-2\}$ tel que $m \neq q-1$ il existe m' tel que $m' = m-q$ ou $m' = m+p$ et donc $s_{m'} < s_m$. Notons donc $u_0 = q-1$ (u_k sera l'indice tel que s_{u_k} soit le k-ième plus petit élément de la famille des s_i). Pour $k \in \{0, \ldots, p+q-3\}$ tel que u_k est bien défini et différent de $p-1$, on définit u_{k+1} l'unique entier compris entre 0 et $p+q-2$ tel que $u_{k+1} = u_k + q$ ou $u_{k+1} = u_k - p$. On a donc $s_{u_k} < s_{u_{k+1}}$. Il reste à montrer que cela permet d'aboutir à un classement des s_k c'est-à-dire qu'on peut construire les u_k jusqu'à $u_{p+q-2} = p-1$ et que les u_k ainsi construits sont tous différents.

Soit $m \leq p+q-2$ tel que $u_0, u_1, \ldots, u_m$ soient construits. Montrons que tous ces u_k sont différents. Supposons par l'absurde qu'il existe $i < j$ deux entiers compris entre 0 et $p+q-2$ tels que $u_i = u_j$. Par construction des u_k, il existe s, t deux entiers naturels tels que $u_j = u_i - ps + qt$. Ainsi p divise qt, or p est premier avec q, donc p divise t, donc $t \geq p$. De même, q divise s donc $s \geq q$. Ainsi, $s+t \geq q+p$. De plus, comme s et t ne sont pas tous les deux nuls et $ps = qt$, s et t sont tous les deux non nuls. Or $j - i = s + t$ par construction donc $j - i \geq p+q$. C'est une contradiction car i et j sont compris entre 0 et $p+q-2$.

Il ne reste plus qu'à montrer que pour $k \leq p+q-3$ tel que u_k soit construit, $u_k \neq p-1$. Cela assurera que l'on peut construire $u_0, u_1, \ldots, u_{p+q-2}$, avec les u_k tous différents. Supposons par l'absurde qu'il existe $k \leq p+q-3$ tel que $u_k = p-1$. On dispose de s et t deux entiers naturels tels que $u_k = u_0 - ps + qt$. $p(s+1) = q(t+1)$. Comme précédemment, $s+1+t+1 \geq q+p$, d'où $k \geq p+q-2$. Contradiction. D'où le résultat.

Sens indirect Supposons réciproquement, avec les notations précédentes, que

$$s_{u_0} < \cdots < s_{u_{p+q-2}}$$

Cela implique $p+q-2$ inégalités, toutes différentes et de type $s_k < s_{k+q}$ ou $s_{k+p} < s_k$, ainsi cela implique bien les $p+q-2$ inégalités.

95 La première idée qui vient à l'esprit est de numéroter les cases de 0 à 63 et de faire la somme des cases modulo 64 en ne comptant le numéro d'une case que si la pièce qui s'y trouve est sur pile. De cette manière, n'importe quel état initial de l'échiquier code un numéro et on se dit que pour accéder au numéro de la case secrète, Ivan n'a qu'à retourner la pièce qu'il faut. Par exemple, si l'échiquier code au départ le numéro 43 et que la case secrète est la case numéro 52, Ivan n'a qu'à retourner la pièce située sur le numéro 9.

Malheureusement, cette méthode ne marche pas car si la pièce située sur le numéro 9 est déjà sur pile, la retourner aura pour effet de

soustraire 9 au lieu d'ajouter 9 comme souhaité. Ivan aurait pu aussi faire passer la pièce numéro 55 de pile à face car $-55 \equiv 9\,[64]$ mais si cette pièce est déjà sur face il est bloqué.

Pour s'en tirer, il suffit de numéroter les cases de 0 à 63 en base 2 (voir le rappel 7) :

$$000000_2, 000001_2, 000010_2, \ldots, 111111_2$$

Pour éviter le problème précédent, on définit l'addition suivante (c'est le XOR) : on respecte les règles classiques terme à terme sauf pour $1+1=0$ que l'on compte sans retenue. Par exemple :

$$101100_2 + 111111_2 = 010011_2$$

et

$$001101_2 + 011001_2 = 010100_2$$

Ainsi, additionner ou soustraire un même nombre avec cette règle revient au même et le problème a disparu !

Ivan calcule dans un premier temps le numéro de la case codée par l'échiquier, en sommant toutes les cases. Ensuite, il calcule ce qu'il faut ajouter pour arriver au numéro de la case secrète (donc en fait quels sont les chiffres à changer). Par exemple si la somme est 100110_2 et que la case secrète est la case 011100_2, il faut additionner 111010_2. Il ne reste plus pour Ivan qu'à retourner la pièce numéro 111010_2. Que cette pièce passe de face à pile ou de pile à face, l'effet sera le même. Dimitri calcule ensuite le numéro de la case codée par l'échiquier modifié et il trouvera 011100_2, le numéro de la case secrète.

Montrons maintenant qu'il n'y a pas de stratégie gagnante si le nombre de cases n'est pas une puissance de deux. On considère un plateau de jeu à n cases. Plaçons-nous directement dans la peau de Dimitri qui voit l'échiquier pour la première fois et qui doit deviner la case secrète. Il doit donc avoir établi avec Ivan un code où à chaque combinaison de pièces correspond une case, donc un nombre entre 1 et n. Notons c_i le nombre de combinaisons qui codent la case i pour i allant de 1 à n. Il y a 2^n combinaisons de pièces possibles donc $\sum_{k=1}^{n} c_i = 2^n$.

De plus, et c'est le point clé du code, il faut pouvoir, en partant de n'importe quelle combinaison, accéder à une combinaison codant i. En voyant les choses dans l'autre sens, toute combinaison doit pouvoir être atteinte en partant d'une des c_i combinaisons codant i. Comme chaque

combinaison codant i engendre au maximum n combinaisons différentes, on doit avoir $n \times c_i \geq 2^n$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = 2^n \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, ..., n\}, c_i \geq \frac{2^n}{n}$$

donc

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, c_i = \frac{2^n}{n}$$

or les c_i sont entiers, donc n divise 2^n et n est nécessairement une puissance de deux.

96 Lorsque le directeur de la prison choisit une suite u de réels (dont le n-ième terme correspond au réel du n-ième prisonnier), les prisonniers doivent annoncer une suite v (dont le n-ième terme correspond au réel annoncé par le n-ième prisonnier) telle que v soit égale terme à terme à u sauf en un nombre fini de termes. Cela amène à considérer la relation d'équivalence suivante (voir le rappel 3) : deux suites sont équivalentes si elles sont égales à partir d'un certain rang

$$\forall (u, v) \in \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}\right)^2, u \sim v \iff \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, u_n = v_n$$

Les prisonniers se mettent d'accord pour associer à classe d'équivalence un représentant (on utilise ici l'axiome du choix). Quand le directeur choisit une suite u, si les prisonniers arrivent à annoncer le représentant v de sa classe d'équivalence, comme $u \sim v$, c'est gagné. Comment faire ? Il suffit, pour le prisonnier sur la marche numéro n, de compléter la suite qu'il observe par n zéros au début. De cette manière il forme une suite équivalente à u (puisqu'à part les zéros au début, elle lui est égale à partir du rang n) donc représentée par la même suite v. Il ne lui reste plus qu'à annoncer v_n.

97 Dans l'énigme 39, on considérait la parité du nombre de chapeaux noirs vus par le prisonnier du haut. Cette méthode n'est bien entendu pas possible ici car il peut y avoir un nombre infini de chapeaux noirs. Ce qui reste inchangé c'est que le prisonnier du haut doit annoncer une couleur en fonction de tous les chapeaux qu'il voit, c'est-à-dire en fonction de la suite à valeurs dans $\{0, 1\}$ dont le n-ième terme ($n \geq 1$) correspond à la couleur du chapeau du prisonnier numéro n. Une stratégie consiste donc à fixer une partition de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ en deux ensembles A et B. L'ensemble A correspond aux suites pour lesquelles le prisonnier du haut annonce

"blanc", l'ensemble B celles où il annonce "noir". À quelle condition cette partition correspond-t-elle à une stratégie qui fonctionne ? On constate qu'il est nécessaire que pour toute suite de l'ensemble A, si l'on change exactement un terme, on tombe sur une suite de l'ensemble B (on notera cette condition $\mathcal{P}$). En effet, si deux suites de A sont identiques sauf au n-ième terme, le prisonnier sur la marche n n'aura aucun moyen de deviner sa couleur. La condition $\mathcal{P}$ est suffisante car si une partition vérifiant $\mathcal{P}$ existe les prisonniers peuvent déduire tour à tour leur couleur tout comme dans l'énigme 39.

Construisons maintenant une partition vérifiant $\mathcal{P}$. Si la suite nulle est dans, disons, l'ensemble A, on sait déjà que toutes les suites qui s'obtiennent en changeant un nombre pair de termes de la suite nulle sont dans A aussi. Malheureusement, ce ne sont que des suites nulles à partir d'un certain rang : en partant de la suite nulle, on n'arrive pas à définir dans quel ensemble est la suite constante égale à 1 par exemple. On est ainsi amené à considérer la même relation d'équivalence que pour l'énigme précédente : deux suites sont équivalentes si elles sont égales à partir d'un certain rang

$$\forall (u,v) \in \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}\right)^2, u \sim v \iff \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, u_n = v_n$$

Il est facile de vérifier que c'est bien une relation d'équivalence. Prenons dans chaque classe d'équivalence un représentant et disons qu'il est dans A. Maintenant, prenons une suite $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ quelconque. Elle est dans une certaine classe d'équivalence qui a un représentant v : $u \sim v$. u et v n'ont donc qu'un nombre fini de termes différents. Soit ce nombre est pair et on fixe $u \in A$ soit il est impair et on fixe $u \in B$.

On constate à présent que l'on a bien construit une partition de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ vérifiant $\mathcal{P}$. La stratégie consiste pour les prisonniers à se mettre d'accord sur un codage du type blanc $= 0$ et noir $= 1$, sur la construction des ensembles A et B et enfin un codage blanc $= A$, noir $= B$ pour le premier prisonnier. Ainsi, les prisonniers pourront déduire successivement la couleur de leurs chapeaux. Par exemple, si les prisonniers savent que la suite nulle est dans A, que le premier prisonnier a annoncé blanc et que le deuxième ne voit devant lui que des chapeaux blancs, il sait que son chapeau est blanc, sinon le premier prisonnier aurait vu la suite (1000...) qui est dans B et aurait annoncé noir. Il annonce donc sa couleur et les prisonniers suivants font de même en raisonnant de proche en proche comme dans l'énigme 39.

98 Avec l'énigme 96, on a vu que la relation d'équivalence $\sim$ permettait de façon étonnante aux prisonniers de deviner les réels qu'ils avaient

sur la tête. Le problème avec cette méthode est qu'on ne sait pas à partir de quel rang la suite et son représentant correspondent. L'astuce est de partitionner les tiroirs en cent suites disjointes, par exemple les suites $u^m = (100n + m)_{n\in\mathbb{N}}$, où $0 \leq m \leq 99$. À partir de maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\widetilde{n}$ le réel du tiroir n. Pour m fixé, en ouvrant la suite de tiroirs u^m (c'est à dire les tiroirs numéros u_n^m où $n \in \mathbb{N}$), on découvre la suite réelle $\left(\widetilde{u_n^m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est égale terme à terme à son représentant à partir d'un certain rang r_m. Les prisonniers peuvent se mettre d'accord sur la stratégie suivante : le prisonnier numéro m regarde toutes les suites u^k sauf u^m. Il peut donc calculer $r = \max(r_k)_{k\neq m}$. Ensuite il ouvre la suite u^m à partir du rang $r+1$. Il connaît ainsi presque toute la suite $\left(\widetilde{u_n^m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: les $r+1$ premiers termes lui sont inconnus. Néanmoins, il peut trouver son représentant en procédant comme dans l'énigme 96, c'est-à-dire en complétant la suite observée par des zéros au début : comme $\underbrace{0,\ldots,0}_{r+1 \text{ zéros}}, \widetilde{u_{r+1}^m}, \widetilde{u_{r+2}^m}, \widetilde{u_{r+3}^m}, \ldots$ est en relation avec $\left(\widetilde{u_n^m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, elle a le même représentant v. Le prisonnier annonce v_r pour le tiroir numéro u_r^m. Pour que sa prédiction soit juste, il suffit que $r_m \leq r$. C'est toujours le cas, sauf si r_m est un maximum strict de $\{r_k\}_{0\leq k\leq 99}$. Cet ensemble n'ayant qu'au plus un maximum strict, il n'y a bien en tout qu'au plus un prisonnier qui se trompe.

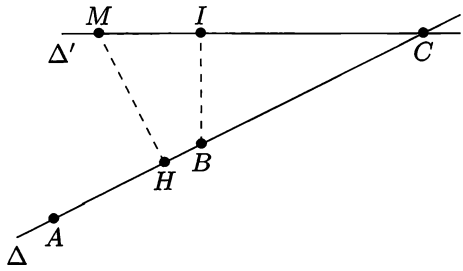
99 Soit $\mathcal{P}$ un ensemble fini de points d'un plan vérifiant : pour tout $A, B \in \mathcal{P}$ tels que $A \neq B$, il existe $C \in \mathcal{P}$ tel que $C \neq A$, $C \neq B$ et $C \in (AB)$. Il s'agit de montrer que tous les points de $\mathcal{P}$ sont alignés.

Supposons par l'absurde qu'ils ne soient pas tous alignés. Soit $M \in \mathcal{P}$, il existe au moins une droite Δ passant par deux points de $\mathcal{P}$ telle que $M \notin \Delta$ (sinon tous les points seraient alignés). Notons $\mathcal{D}_M$ l'ensemble des droites formées par au moins deux points de $\mathcal{P}$ qui ne contiennent pas M, cet ensemble est non vide et clairement fini. On peut donc définir

$$m(M) = \min\{d(M,\Delta) \,|\, \Delta \in \mathcal{D}_M\}$$

avec $d(M,\Delta)$ la distance du point M à la droite Δ , c'est-à-dire, si H désigne le projeté orthogonal de M sur Δ, la distance MH.

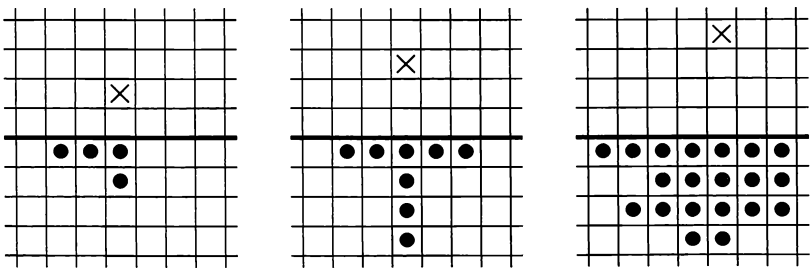
Considérons maintenant le point M de $\mathcal{P}$ tel que $m(M)$ soit minimal. On note Δ la droite de $\mathcal{D}_M$ telle que $m(M) = d(M,\Delta)$. Soit H le projeté orthogonal de M sur Δ. Il existe deux points $A, B \in \mathcal{P}$ tels que $\Delta = (AB)$, et on dispose d'un troisième point C distinct de A et B appartenant à C.



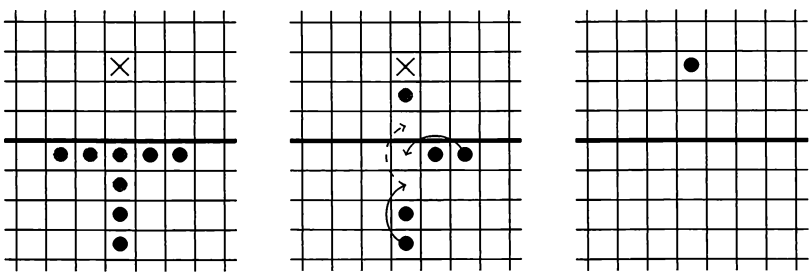
Au moins deux points sont du même côté de H, ici ce sont les points B et C. Soit I le projeté orthogonal de B sur (MC), il apparaît clairement que $BI < MH$, ce qui contredit le caractère minimal de $m(M)$. D'où le résultat.

100 On va commencer par montrer que l'on peut atteindre la quatrième ligne, puis, ce qui est bien plus délicat, que l'on ne peut pas atteindre la cinquième ligne.

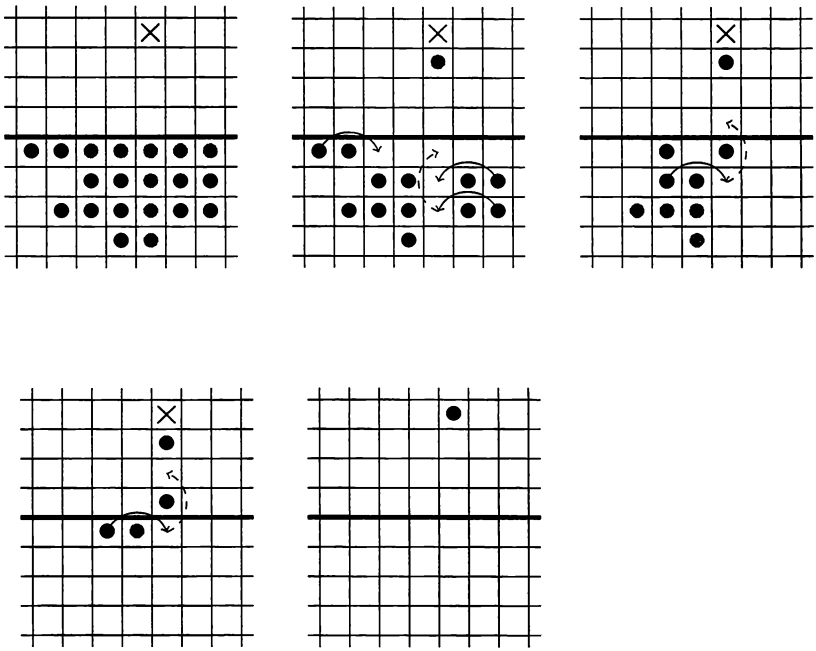
Les configurations ci-dessous permettent d'atteindre respectivement la deuxième, la troisième et la quatrième ligne.



Pour atteindre la troisième ligne, on complète la configuration servant à atteindre la deuxième ligne. Les étapes sont explicitées ci-dessous :



Atteindre la quatrième ligne s'avère un peu plus délicat. On place la configuration nécessaire pour atteindre la troisième ligne, ce qui donne déjà après un certain nombre d'étapes un pion en troisième ligne. Les autres pions vont permettre d'en placer un en deuxième ligne, ce qui permet d'obtenir finalement un pion en quatrième ligne :



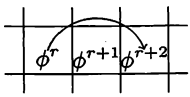
Il reste à montrer que l'on ne peut pas atteindre la cinquième ligne. La démonstration suivante est due à John Horton Conway, célèbre mathématicien britannique.

Commençons par assigner la valeur 1 à une case de la cinquième ligne. On assigne aux autres cases la valeur ϕ^r, où r est le plus petit nombre de pas (horizontaux ou verticaux) pour atteindre la case 1, et ϕ est le nombre d'or moins 1 : $\phi \simeq 0.618$, plus précisément ϕ est l'unique réel positif vérifiant $\phi^2 + \phi = 1$. Graphiquement, cela donne :

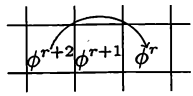
ϕ^3	ϕ^2	ϕ^1	1	ϕ^1	ϕ^2	ϕ^3
ϕ^4	ϕ^3	ϕ^2	ϕ^1	ϕ^2	ϕ^3	ϕ^4
ϕ^5	ϕ^4	ϕ^3	ϕ^2	ϕ^3	ϕ^4	ϕ^5
ϕ^6	ϕ^5	ϕ^4	ϕ^3	ϕ^4	ϕ^5	ϕ^6
ϕ^7	ϕ^6	ϕ^5	ϕ^4	ϕ^5	ϕ^6	ϕ^7
ϕ^8	ϕ^7	ϕ^6	ϕ^5	ϕ^6	ϕ^7	ϕ^8
ϕ^9	ϕ^8	ϕ^7	ϕ^6	ϕ^7	ϕ^8	ϕ^9

Supposons par l'absurde qu'il soit possible d'atteindre la case 1. On dispose alors d'une configuration comportant un nombre fini de pions sous la ligne, qui après un certain nombre d'étapes, amène un pion sur la case 1. On appelle énergie d'un pion la valeur de la case où il se trouve, et énergie totale des pions la somme des énergies des pions.

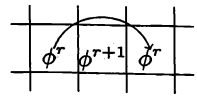
Montrons que l'énergie totale des pions ne peut que décroître lors d'un déplacement. Il y a trois types de déplacements :



Premier type



Deuxième type



Troisième type

— Pour le premier type de déplacement, la variation d'énergie est $\phi^{r+2} - \left(\phi^{r+1} + \phi^r\right)$. Comme $0 < \phi < 1$, $\phi^{r+2} < \phi^{r+1} < \phi^{r+1} + \phi^r$. L'énergie décroît strictement.
— Dans le deuxième type, la variation d'énergie est $\phi^r - \left(\phi^{r+1} + \phi^{r+2}\right)$. Comme $\phi^2 + \phi = 1$, $\phi^{r+2} + \phi^{r+1} = \phi^r$, et l'énergie ne varie pas.
— Enfin, pour le troisième type, la variation est $\phi^{r+1} - \left(\phi^r + \phi^{r+1}\right) = -\phi^r < 0$ donc l'énergie décroît strictement.

Finalement, quoi que l'on fasse, l'énergie décroît toujours, au sens large. Calculons maintenant l'énergie E contenue par tout le demi-plan inférieur.

L'énergie de la première ligne est

$$\phi^5 + 2\phi^6 + 2\phi^7 + 2\phi^8 + ... = \phi^4\left(\phi + 2\left(\phi^2 + \phi^3 + \phi^4 ...\right)\right)$$

Or,

$$\phi^2 + \phi^3 + \phi^4 + ... = \frac{\phi^2}{1-\phi} = 1$$

ainsi l'énergie de la première ligne est

$$\phi^4 (\phi + 2)$$

cela permet d'en déduire l'énergie totale :

$$E = \phi^4 (\phi + 2) \left(1 + \phi + \phi^2 + ...\right)$$

Or,

$$1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + ... = \frac{1}{1-\phi} = \frac{1}{\phi^2}$$

donc

$$E = \phi^4 (\phi + 2) \times \frac{1}{\phi^2} = \phi^2 (\phi + 2) = (1 - \phi)(\phi + 2) = 2 - \phi - \phi^2 = 1$$

L'énergie totale des pions est strictement inférieure à E car on a supposé qu'il n'y avait qu'un nombre fini de pions. Or, une fois qu'un pion est à la case 1, l'énergie du système est supérieure ou égale à 1. C'est absurde car l'énergie ne peut que décroître. Conclusion : il est impossible d'atteindre la cinquième ligne.

Quatrième partie

Rappels

1 Le principe des tiroirs

Énoncé du principe

Le principe des tiroirs est un principe simple et très utile. Commençons par l'énoncer avec un exemple :

> Si onze chaussettes sont rangées dans dix tiroirs alors il existe (au moins) un tiroir qui contient (au moins) deux chaussettes.

C'est du bon sens et chacun peut se convaincre aisément de la véracité de ce principe. On peut remplacer les nombres dix et onze choisis dans cet exemple par n et $n+1$ avec n un entier non nul quelconque. On obtient l'énoncé suivant :

> Soit n un entier naturel non nul, si $n+1$ chaussettes sont rangées dans n tiroirs alors il existe (au moins) un tiroir qui contient (au moins) deux chaussettes.

Exemples d'applications

On considère un amphithéâtre qui contient 400 étudiants. Montrons qu'il existe au moins deux étudiants qui sont nés le même jour de l'année. On applique le principe des tiroirs aux 365 jours de l'année (on ne va pas considérer les années bissextiles). Chaque jour de l'année correspond à un tiroir et chaque étudiant à une chaussette. Puisqu'il y a plus de chaussettes que de tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contient deux chaussettes. Il y a donc au moins un jour de l'année où l'on va fêter deux anniversaires. On a le même résultat avec 366 étudiants. Par contre on ne peut rien conclure s'il y a 365 étudiants ou moins dans l'amphithéâtre.

Voici une application plus mathématique et plus délicate : soit x un réel quelconque et N un entier naturel non nul, on veut montrer qu'il deux entiers p et q avec $q \neq 0$ tels que :

$$|qx - p| < \frac{1}{N}$$

On rappelle que la partie entière d'un réel est le plus grand entier plus petit que le réel en question, elle se note $\lfloor . \rfloor$. Par exemple, $\lfloor 4.6 \rfloor = 4$ car 4 est le plus grand entier plus petit que 4.6, $\lfloor 19 \rfloor = 19$ et $\lfloor -3.2 \rfloor = -4$.

La partie fractionnaire d'un réel x est $x - \lfloor x \rfloor$, elle se note $\{x\}$. Par exemple, $\{4.6\} = 4.6 - 4 = 0.6$, $\{19\} = 0$ et $\{-3.2\} = -3.2 + 4 = 0.8$. Remarquons que la partie fractionnaire est un nombre positif ou nul strictement inférieur à 1. Passons maintenant à la démonstration du résultat annoncé.

Considérons les $N + 1$ nombres

$$\{0 \times x\},\ \{1 \times x\},\ ...,\ \{N \times x\}$$

qui appartiennent tous à l'intervalle $[0, 1[$. On les place dans les N tiroirs

$$\left[0, \frac{1}{N}\right[,\ \left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right[,\ ...,\ \left[\frac{N-1}{N}, 1\right[$$

Il existe donc un tiroir dans lequel se trouvent au moins deux de ces nombres. Ainsi, il existe un entier k compris entre 0 et $N - 1$ et deux entiers $n \neq m$ compris entre 0 et N tels que $\{nx\}$ et $\{mx\}$ soient dans le même tiroir $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[$:

$$\frac{k}{N} \leq \{nx\} < \frac{k+1}{N} \text{ et } \frac{k}{N} \leq \{mx\} < \frac{k+1}{N}$$

On en déduit que

$$|\{nx\} - \{mx\}| < \frac{1}{N}$$

Par ailleurs, $\{nx\} = nx - \lfloor nx \rfloor$ et $\{mx\} = mx - \lfloor mx \rfloor$ donc

$$\{nx\} - \{mx\} = (n - m)x - (\lfloor nx \rfloor - \lfloor mx \rfloor)$$

En notant p l'entier $\lfloor nx \rfloor - \lfloor mx \rfloor$ et q l'entier non nul $n - m$, on obtient

$$|qx - p| < \frac{1}{N}$$

Le théorème ainsi démontré est dû à Dirichlet, mathématicien allemand du dix-neuvième siècle, qui a formalisé le principe des tiroirs. C'est pourquoi on appelle parfois ce principe "principe des tiroirs de Dirichlet".

Méthode de comparaison résultats/solutions

La méthode de comparaison résultats/solutions est une application du principe des tiroirs utilisée dans de nombreuses énigmes. Pour expliquer en quoi cela consiste prenons un exemple simple.

Considérons le problème suivant : on dispose de neuf poids, numérotés de 1 à 9, qui ont tous la même masse sauf un qui est plus lourd. Le but est de trouver quel est ce poids plus lourd que les autres. Pour cela, on dispose d'une balance de Roberval avec laquelle on ne peut effectuer que deux pesées. Comment faire ?

C'est facile ! On pose les poids 1, 2, 3 sur le plateau droit, les poids 4, 5, 6 sur le plateau gauche, on laisse les poids 7, 8, 9 de côté et on effectue la première pesée. Cette pesée permet de déterminer dans quel groupe se trouve le poids le plus lourd. On effectue ensuite la seconde pesée avec un poids du groupe en question sur le plateau droit, un autre sur le plateau gauche et le troisième de côté. On détermine ainsi le poids le plus lourd.

Passons maintenant à un problème plus difficile où il va falloir utiliser la méthode de comparaison résultats/solutions : on dispose de dix poids, numérotés de 1 à 10, qui ont tous la même masse sauf un qui est plus lourd. Le but est de trouver quel est ce poids plus lourd que les autres. Pour cela, on dispose d'une balance de Roberval avec laquelle on ne peut effectuer que deux pesées. Comment faire ?

C'est impossible ! Pour montrer cette impossibilité, on utilise la méthode de comparaison résultats/solutions. Il faut comparer le nombre de solutions du problème au nombre de résultats possibles de l'expérience qu'on a à disposition. Le problème posé admet dix solutions différentes : le poids 1 est le plus lourd, le poids 2 est le plus lourd, ..., le poids 10 est le plus lourd. Par ailleurs, ce problème admet neuf résultats possibles : lorsqu'on fait deux pesées consécutives, il y a $3 \times 3 = 9$ résultats possibles car chaque pesée a trois résultats possibles (le plateau penche à gauche, à droite ou est stable).

On applique maintenant le principe des tiroirs : il y a dix solutions et neuf résultats possibles, il y a donc au moins un résultat qui contient deux solutions. Ainsi, quelles que soient les pesées effectuées, il y aura toujours au moins un cas défavorable où on hésitera entre deux poids à l'issue des deux pesées. C'est donc impossible.

Énigmes utilisant le principe des tiroirs

L'énigme 20 est une utilisation directe du principe des tiroirs. La méthode de comparaison résultats/solutions présentée dans le paragraphe précédent sert très souvent à démontrer l'optimalité d'une stratégie donnée. Les énigmes 37, 57, 68 et 76 utilisent cette méthode.

2 Coefficients binomiaux

Calcul de "p parmi n"

Pour comprendre ce que sont les coefficients binomiaux commençons par un exemple simple : combien de façons différentes y a-t-il de choisir deux crayons parmi quatre crayons tous différents ? On peut numéroter les crayons de 1 à 4, les deux crayons choisis peuvent être :

— les crayons 1 et 2
— les crayons 1 et 3
— les crayons 1 et 4
— les crayons 2 et 4
— les crayons 2 et 3
— les crayons 3 et 4

Il y a donc six façons différentes de choisir deux crayons parmi quatre, c'est-à-dire qu'il y a six parties à deux éléments de l'ensemble des crayons à quatre éléments. On note alors $\binom{4}{2} = 6$.

De manière plus générale, pour n un entier naturel et p un entier naturel inférieur ou égal à n, on note $\binom{n}{p}$ et on lit "p parmi n" le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. $\binom{n}{p}$ est appelé "coefficient binomial".

Calculons $\binom{n}{p}$. On imagine que l'on a n objets devant nous et que l'on doit en choisir p. On peut choisir le premier comme on veut : on a n possibilités. Pour le deuxième, on n'a plus que le choix entre $n-1$ objets puisqu'un objet a déjà été choisi. Pour le troisième, on a $n-2$ possibilités, et ainsi de suite : il y a $n-(p-1)$ possibilités pour le p-ième. Ainsi, il y a $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)$ façons de choisir une configuration. Cependant, choisir une telle configuration, ce n'est pas pareil que de choisir une partie à p éléments car pour une configuration on tient compte de l'ordre des éléments. Pour une partie à p éléments donnée, il y a $p \times (p-1) \times \cdots \times 1$ configurations possibles car il y a p possibilités pour le premier élément, $p-1$ pour le deuxième, et ainsi de suite. Il faut donc diviser le nombre $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)$ par $p \times (p-1) \times \cdots \times 1$ (qui se note $p!$ et se lit "factorielle p" ou "p factorielle", avec la convention $0! = 1$) pour trouver le nombre de parties

à p éléments :

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Évidemment, cette formule permet de retrouver la quantité $\binom{4}{2}$ calculée précédemment :

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = 6$$

Quelques propriétés utiles

Une première relation évidente est la suivante :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

En effet,

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Cela traduit le fait que choisir un ensemble à p éléments revient à choisir les $n-p$ éléments mis de côté.

La relation suivante est fondamentale :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Démontrons-la :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{(n-p)!}\left(\frac{1}{p!} + \frac{n-p}{(p+1)!}\right)$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{(n-p)!} \times \frac{p+1+n-p}{(p+1)!}$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!}$$

Cela permet de calculer facilement les coefficients binomiaux. On peut les écrire en triangle avec, sur la n-ième ligne, les coefficients $\binom{n}{0}, \ldots, \binom{n}{n}$. Cela donne :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Chaque ligne s'obtient très facilement à l'aide de la précédente : vu la formule précédente, il suffit de sommer deux coefficients consécutifs d'une même ligne pour obtenir celui en dessous.

Les binomiaux sont utiles pour développer l'expression $(a+b)^n$, avec a et b deux réels et n un entier naturel non nul. Pour $n=2$ par exemple, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, c'est une identité remarquable que l'on apprend au collège. La formule du binôme de Newton est une identité remarquable pour n quelconque. Elle s'écrit :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Cela se prouve facilement par récurrence. On peut aussi remarquer que $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons d'obtenir un coefficient $a^k b^{n-k}$ dans le développement de $(a+b)^n$.

Énigmes utilisant les coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux sont très utiles pour toutes les questions de dénombrement. Ainsi, les énigmes 36, 67, 72 et 76 utilisent les coefficients binomiaux.

3 Relations d'équivalence

Définition des relations d'équivalence

La notion de relation d'équivalence n'est utilisée que dans quelques énigmes particulièrement intéressantes du niveau 3. C'est cependant une notion très présente en mathématiques. L'idée est de mettre en relation les éléments d'un ensemble et donc de les regrouper dans ce que l'on appelle des classes.

Commençons par un exemple simple. On considère l'ensemble des élèves d'un collège et on introduit la relation suivante : "deux élèves sont en relation s'ils sont nés le même mois". Cette relation permet de regrouper les élèves par classes. Pour être une relation d'équivalence, c'est-à-dire pour permettre de regrouper les éléments d'un ensemble par classes, une relation doit être réflexive, symétrique et transitive. La relation de l'exemple est bien une relation d'équivalence car elle vérifie ces trois conditions :

- Tout élève est en relation avec lui-même (car il est né le même mois que lui-même), c'est la réflexivité.
- Si l'élève A est en relation avec l'élève B, alors l'élève B est en relation avec l'élève A, c'est la symétrie.
- Si l'élève A est en relation avec l'élève B et si l'élève B est en relation avec l'élève C, alors l'élève A est en relation avec l'élève C, c'est la transitivité.

Formellement, une relation d'équivalence sur un ensemble E est souvent notée $\sim$. Pour deux éléments x et y de E, on notera $x \sim y$ si x est en relation avec y. Pour qu'une relation soit une relation d'équivalence, elle doit vérifier les trois propriétés citées :

- $\forall x \in E, x \sim x$: x doit être en relation avec lui-même, c'est la réflexivité.
- $\forall (x, y) \in E^2, x \sim y \Rightarrow y \sim x$: si x est en relation avec y alors y est en relation avec x, c'est la symétrie.
- $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \sim y, y \sim z) \Rightarrow x \sim z$: si x est en relation avec y et si y est en relation avec z alors x est en relation avec z, c'est la transitivité.

Exemple de relation d'équivalence

Sur $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, on peut définir la relation suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, x \sim y \text{ si } \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 3k$$

c'est-à-dire que x est en relation avec y si $x - y$ est un multiple de 3. C'est bien une relation d'équivalence car :

- Pour x dans $\mathbb{Z}$, x est en relation avec x car $x - x = 0$ est un multiple de 3 : $0 = 3 \times 0$.
- Pour x et y dans $\mathbb{Z}$, si $x - y$ est un multiple de 3 alors $y - x$ est aussi un multiple de 3 (il suffit de changer le signe de k) donc si $x \sim y$ alors $y \sim x$.
- Pour x, y et z dans $\mathbb{Z}$, si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors il existe k_1 tel que $x - y = 3k_1$ et il existe k_2 tel que $y - z = 3k_2$ donc $x - z = 3(k_1 + k_2)$ et $x \sim z$.

En fait, on a simplement défini la relation "être congru modulo 3" (se reporter éventuellement au rappel sur la congruence).

Classes d'équivalence et représentants

Lorsqu'un ensemble E est muni d'une relation d'équivalence $\sim$, on peut regrouper ses éléments par classes. Pour un élément x donné de E, la classe de x, notée $Cl(x)$, est l'ensemble des éléments y de E qui sont en relation avec x :

$$Cl(x) = \{y \in E | x \sim y\}$$

On note $E/\sim$ l'ensemble des classes des éléments de E :

$$E/\sim = \{Cl(x) | x \in E\}$$

$E/\sim$ est donc un ensemble d'ensembles. Pour $x, y \in E$ tels que $x \sim y$, $Cl(x) = Cl(y)$. En effet, pour $z \in E$, si $z \sim x$, par transitivité, $z \sim y$, et réciproquement : $z \sim x \iff z \sim y$.

Par exemple, pour la relation "être congru modulo 3" exposée précédemment, déterminons les classes d'équivalences.

$Cl(0) = \{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, n - 0 = 3k\} = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}$
$Cl(1) = \{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, n - 1 = 3k\} = \{3k + 1 | k \in \mathbb{Z}\}$
$Cl(2) = \{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, n - 2 = 3k\} = \{3k + 2 | k \in \mathbb{Z}\}$

Ce sont les seules classes d'équivalences. En effet, pour $n \in \mathbb{Z}$, n est toujours en relation avec 0, 1, ou 2 (il suffit d'effectuer la division euclidienne de n par 3 pour s'en convaincre). Par exemple, $89 = 3 \times 29 + 2$ donc $89 \sim 2$. Ainsi, d'après ce que l'on a vu précédemment, on

aura toujours $Cl(n) = Cl(0)$ ou $Cl(n) = Cl(1)$ ou $Cl(n) = Cl(2)$ (dans l'exemple, $Cl(89) = Cl(2)$).

On note que les trois ensembles de $\mathbb{Z}/\sim$ sont disjoints, c'est à dire qu'ils n'ont pas d'éléments en commun. Cela est très général : supposons que l'on ait $Cl(x)$, $Cl(y)$ deux éléments distincts de $E/\sim$ et z appartenant à ces deux classes, $z \sim x$ et $z \sim y$ d'où $x \sim y$, mais alors $Cl(x) = Cl(y)$, ce qui est absurde puisqu'on avait supposé $Cl(x)$ et $Cl(y)$ distincts.

De plus, on a toujours

$$E = \bigcup_{\Omega \in E/\sim} \Omega$$

ce qui se lit : pour tout $x \in E$, il existe $\Omega \in E/\sim$ tel que $x \in \Omega$ (et tous les Ω sont inclus dans E). En effet, pour $x \in E$, $Cl(x) \in E/\sim$ et $x \in Cl(x)$.

Résumons. Tous les éléments de $E/\sim$ sont non vides, ils sont deux à deux disjoints, et leur union vaut E tout entier. On dit que $E/\sim$ forme une partition de E. Réciproquement, si l'on se donne une partition $\mathcal{P}$ de E, c'est-à-dire une famille de parties non vides de E deux à deux disjointes d'union E, il existe une relation d'équivalence $\sim$ telle que $\mathcal{P} = E/\sim$. Cette relation est très simple à construire : on dit que $x \sim y$ lorsqu'il existe $\Omega \in \mathcal{P}$ tel que $x \in \Omega$ et $y \in \Omega$.

Lorsqu'on utilise des relations d'équivalence, on emploie souvent le terme "représentant". Un représentant d'une classe $\Omega \in E/\sim$ est tout simplement un élément de cette classe. $x \in \Omega$ est appelé représentant car il permet de "remonter" à Ω, au sens où $\Omega = Cl(x)$. En effet, par définition de $E/\sim$, Ω s'écrit $Cl(x_0)$ avec $x_0 \in E$; si $x \in \Omega$, $x \sim x_0$ et donc $Cl(x) = Cl(x_0) = \Omega$. Pour "remonter" à $E/\sim$ tout entier, on aimerait définir $V = \{x_\Omega | \Omega \in E/\sim\}$ où $x_\Omega \in \Omega$ (x_Ω est un représentant de Ω). Dans le cas de l'exemple, c'est facile, on peut prendre $V = \{0, 1, 2\}$. Cependant, quand $E/\sim$ est infini (ce qui suppose déjà que E est infini), considérer V ne va de soi, car comment choisir dans chaque classe un représentant ? Il est impossible de prouver que la construction de V est possible, mais comme on ne peut pas non plus démontrer que c'est impossible (la construction de V ne contredit pas d'axiomes), on peut poser comme un axiome qu'il est possible de construire V. C'est l'axiome du choix. S'il peut sembler à première vue découler du bon sens, il conduit néanmoins à des résultats très surprenants dont le plus connu est le théorème de Banach-Tarsky : "il est possible de découper une sphère en un nombre fini de morceaux et de réassembler ces morceaux en deux sphères identiques à la première". Les énigmes 96, 97 et 98 sont aussi des utilisations surprenantes de l'axiome du choix.

Énigmes utilisant les relations d'équivalence

La notion de relation d'équivalence est utilisée pour les énigmes 96, 97 et 98. Dans chacune de ces énigmes, il faut introduire une certaine relation d'équivalence et en considérer une famille de représentants (ce qui nécessite l'utilisation de l'axiome du choix).

4 Les bijections

Introduction à la notion de bijection

Imaginons la situation suivante : un professeur voulant savoir s'il y a assez de chaises dans sa salle de classe demande à tous les élèves de s'asseoir. Si tous les élèves sont assis et toutes les chaises sont occupées c'est qu'il y a autant de chaises que d'élèves. On dit dans ce cas que l'ensemble des élèves est en bijection avec l'ensemble des chaises. En effet, lorsque le professeur fait asseoir ses élèves, il associe en quelque sorte chaque élève à une chaise et chaque chaise à un élève, il met donc en bijection l'ensemble des élèves et l'ensemble des chaises.

D'une façon informelle, on peut dire que deux ensembles E et F sont en bijection s'il est possible de ranger par couples les éléments de E avec ceux de F à l'aide d'une fonction $f : E \to F$ qu'on appellera alors une bijection.

Surjectivité, injectivité

Notons E l'ensemble des élèves et F l'ensemble des chaises. Soit f une fonction de E dans F. Pour que f soit une bijection, il faut :

— qu'il n'y ait pas deux élèves sur la même chaise, c'est le caractère injectif

— qu'il n'y ait pas de chaise vide, c'est le caractère surjectif

Mathématiquement, l'injectivité s'écrit :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ce qui se lit : pour tout couple (x_1, x_2) d'éléments de E, si x_1 est différent de x_2 alors $f(x_1)$ est différent de $f(x_2)$.

Mathématiquement, la surjectivité s'écrit :

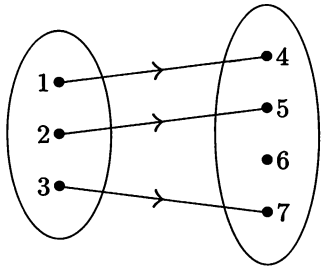
$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

ce qui se lit : pour tout élément y de F, il existe au moins un élément x de E tel que $f(x) = y$.

Une fonction quelconque $f : E \to F$ est une bijection si elle est injective et surjective.

Considérons par exemple la fonction f allant de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{4, 5, 6, 7\}$ et définie par :

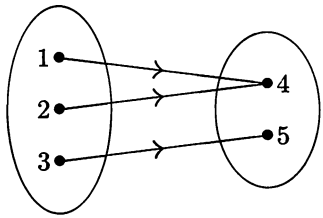
$$f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 7$$



Cette fonction est injective car tous les éléments de son ensemble de départ $\{1, 2, 3\}$ ont des images distinctes. Par contre, cette fonction n'est pas surjective car elle n'atteint pas tout son ensemble d'arrivée $\{4, 5, 6, 7\}$. En effet, elle n'atteint pas 6.

Considérons maintenant la fonction f allant de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{4, 5\}$ et définie par :

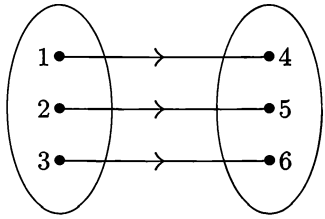
$$f(1) = 4, f(2) = 4, f(3) = 5$$



Cette fonction n'est pas injective car 1 et 2 ont la même image. Par contre, elle est surjective car elle atteint tous les éléments de son ensemble d'arrivée $\{4, 5\}$.

Enfin, considérons la fonction f allant de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{4, 5, 6\}$ et définie par :

$$f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 6$$



Cette fonction est à la fois injective et surjective, elle est donc bijective. Elle range par couples les éléments de $\{1, 2, 3\}$ avec ceux de $\{4, 5, 6\}$.

Exemples de bijection

Notons $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ l'ensemble des entiers pairs. Montrons qu'il est possible de mettre ces deux ensembles en bijection.

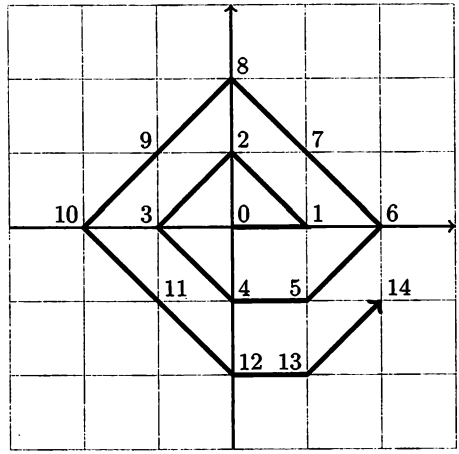
On peut par exemple considérer la fonction suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{P} \\ n & \mapsto 2n \end{cases}$$

f est injective car pour $n_1 \neq n_2$ on a $2n_1 \neq 2n_2$ donc $f(n_1) \neq f(n_2)$. De plus, f est surjective car tout entier pair est de la forme $2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, donc est atteint par f avec $f(k) = 2k$.

Voici un autre exemple plus difficile. Le but est de construire une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est l'ensemble des couples (m, n) où m et n sont des entiers).

L'idée est de parcourir $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en partant de $(0, 0)$ et en décrivant une spirale, comme sur la figure ci-dessous :



On construit ainsi une fonction à la fois injective et surjective qui associe à chaque entier naturel de $\mathbb{N}$ un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On dit que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est dénombrable.

D'une façon plus générale, on dit qu'un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ainsi, tout ensemble dénombrable a d'une certaine façon "la même taille" que $\mathbb{N}$. Comme $\mathbb{Z}$ et même $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sont dénombrables, on pourrait penser que tout ensemble infini est dénombrable. Ce n'est pas le cas, puisque $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable ! $\mathbb{R}$ est en un sens "beaucoup plus grand" que $\mathbb{N}$. En revanche, $\mathbb{R}$ est de la même taille que $\mathbb{R}^2$, ce qui est assez contre-intuitif (on pourrait penser que le plan a "beaucoup plus" de points que la droite). C'est au mathématicien allemand Georg Cantor que l'on doit toutes ces découvertes, qui ont beaucoup marqué ses contemporains.

Les permutations

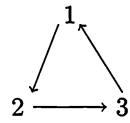
Revenons à présent à des bijections entre ensembles finis. De telles bijections, appelées permutations, correspondent simplement aux différentes façons de mélanger un jeu de cartes.

Pour n un entier naturel non nul, une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ est une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$. Par exemple, si l'on prend $n = 3$, la fonction σ définie sur $\{1, 2, 3\}$ par $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$ et $\sigma(3) = 2$ est une permutation de $\{1, 2, 3\}$. Se donner une permutation de $\{1, 2, 3\}$, c'est se donner un triplet $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$ qui est un "mélange" de $(1, 2, 3)$. Faisons la liste des triplets possibles :

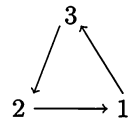
1. $(1,2,3)$
2. $(2,1,3)$
3. $(3,2,1)$
4. $(1,3,2)$
5. $(2,3,1)$
6. $(3,1,2)$

La permutation donnée comme exemple précédemment est la permutation numéro 6. On peut voir très concrètement les permutations de $\{1,2,3\}$ comme les différentes façons de mélanger un jeu de trois cartes : au début les trois cartes, numérotées de 1 à 3, sont dans l'ordre $(1,2,3)$, après le mélange elles sont dans un ordre différent. La première permutation est la permutation identité, elle consiste à ne pas mélanger le jeu. En revanche, la deuxième permutation correspond à un vrai mélange, puisque les cartes 1 et 2 ont été échangées. Les permutations 3 et 4 consistent également en un échange de deux cartes (respectivement les cartes 1,3 et les cartes 2,3). De telles permutations sont appelées transpositions.

La permutation 5 n'est pas une transposition, car il n'y a pas deux mais trois cartes qui ont été déplacées. Cette permutation est ce que l'on appelle un cycle de longueur trois. En effet, on peut la représenter comme ci-dessous :



Les flèches correspondent à l'image par la permutation. Ainsi, 1 est envoyé sur 2 qui est envoyé sur 3 qui est envoyé sur 1. On note cette permutation (1 2 3) (sans virgule, pour différencier du triplet $(1,2,3)$). On peut aussi la noter (2 3 1), car 2 est envoyé sur 3 qui est envoyé sur 1 qui est envoyé sur 2. La permutation numéro 6 est un autre cycle de longueur trois (ou 3-cycle) :



Comme 3 est envoyé sur 1 qui est envoyé sur 2 qui est envoyé sur 3, on note ce cycle (3 1 2). À noter que les transpositions sont des cycles aussi, mais de longueur deux. Par exemple, comme la deuxième permutation de la liste ne fait qu'envoyer 1 sur 2 qui est lui-même envoyé sur 1, elle se note (1 2).

Bien qu'il soit impossible de passer de $(1,2,3)$ à $(2,3,1)$ en une seule transposition, on peut en revanche y arriver en effectuant deux transpositions successives. En effet, si l'on commence par effectuer la transposition (1 3), on passe de $(1,2,3)$ à $(3,2,1)$, et en effectuant cette fois-ci la transposition (2 3), on arrive bien à $(3,2,1)$. La permutation effectuée en faisant la transposition (1 3) puis la transposition (2 3) est notée (2 3) $\circ$ (1 3) (le $\circ$ est le "rond" de la composition des applications). On a donc la formule suivante :

$$(1\ 2\ 3) = (2\ 3) \circ (1\ 3)$$

En fait, ceci est très général : on peut toujours voir une permutation de $\{1,\ldots,n\}$ comme une composée de transpositions. Concrètement, si l'on ne fait qu'échanger deux à deux des cartes d'un jeu, on pourra tout de même arriver à faire tous les mélanges possibles. Par exemple, on a vu que (1 2 3) pouvait s'écrire comme composé de deux transpositions. Cela dit, il peut aussi s'écrire comme composé de quatre transpositions puisque

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 2) \circ (1\ 2) \circ (2\ 3) \circ (1\ 3)$$

En effet, (1 2) $\circ$ (1 2) ne change rien puisque cela consiste à inverser les cartes 1 et 2 et les remettre aussitôt à leur place. (1 2 3) peut aussi s'écrire avec 6, 8, 10 transpositions... Par contre, (1 2 3) ne pourra jamais s'écrire comme la composée d'un nombre impair de transpositions. Plus généralement, si une permutation σ de $\{1,\ldots,n\}$ s'écrit comme la composée d'un nombre pair (respectivement impair) de transpositions, alors σ ne pourra jamais s'écrire comme la composée d'un nombre impair (respectivement pair) de transpositions. Autrement dit, le nombre de transpositions à composer pour obtenir σ n'est pas unique, mais sa parité l'est. Concrètement, si l'on mélange un jeu de cartes en effectuant un nombre pair de transpositions, on ne pourra jamais effectuer le même mélange avec un nombre impair de transpositions. Nous omettrons la démonstration de ce résultat car elle est un peu technique.

Cela permet de définir l'application signature, très utilisée dès que l'on a affaire à des permutations : cette application, habituellement notée ϵ, associe à toute permutation 1 si elle peut s'écrire comme la composée

d'un nombre pair de transpositions, -1 sinon (c'est-à-dire si elle s'écrit comme la composée d'un nombre impair de transpositions). Grâce au résultat énoncé précédemment, cette application est bien définie. Par exemple, $\epsilon((1\,2)) = -1$ et $\epsilon((1\,2\,3)) = 1$. D'une façon plus générale, le lecteur motivé pourra montrer que la signature d'un n-cycle est $(-1)^{n-1}$.

L'écriture d'une permutation comme une composée de transpositions est souvent utile, mais elle a cependant le défaut de ne pas être pas unique. Une décomposition pratique, qui a l'avantage d'être unique, est la décomposition en cycles à supports disjoints. Qu'est-ce que cela signifie ? Prenons par exemple la permutation σ qui à $1,\ldots,6$ renvoie respectivement $3,4,1,5,6,2$. On a $\sigma = (1\,3) \circ (2\,4\,5\,6)$. En effet, l'image de $1,\ldots,6$ par le cycle $(2\,4\,5\,6)$ est $1,4,3,5,6,2$, puis en effectuant la transposition $(1\,3)$ on arrive bien à $3,4,1,5,6,2$. On appelle support d'un cycle l'ensemble des éléments sur lesquels il agit, ainsi le support de $(1\,3)$ est $\{1,3\}$ et celui de $(2\,4\,5\,6)$ est $\{2,4,5,6\}$. Ces deux ensembles sont disjoints (c'est-à-dire qu'ils n'ont pas d'éléments en commun). On a donc décomposé σ en deux cycles de supports disjoints. On peut se convaincre que, à l'ordre des facteurs près (c'est-à-dire en ne considérant pas $(2\,4\,5\,6) \circ (1\,3)$ comme une nouvelle décomposition), cette décomposition est unique. D'une façon générale, toute permutation s'écrit comme une composée de cycles à supports disjoints, et cette décomposition est unique (toujours à l'ordre des facteurs près...). Ce résultat peut se démontrer en utilisant la relation d'équivalence suivante : si σ est une permutation de $\{1,\ldots,n\}$, on dit $p,q \in \{1,\ldots,n\}$ sont équivalents lorsqu'il existe un entier naturel k tel que $\sigma^k(p) = q$. Les classes d'équivalence de cette relation seront les supports des cycles.

Une dernière chose qui pourra servir pour les énigmes est le dénombrement des permutations. Comme on l'a vu précédemment, il y a $6 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$ permutations de $\{1,2,3\}$. Plus généralement, il y a $n!$ permutations de $\{1,\ldots,n\}$. En effet, choisir une permutation de σ, c'est choisir $\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)$. On a n possibilités pour $\sigma(1)$, une fois que $\sigma(1)$ est choisi, on a $n-1$ possibilités pour $\sigma(2)$ (car il doit être différent de $\sigma(1)$), puis $n-2$ possibilités pour $\sigma(3)$, et ainsi de suite, jusqu'à une seule possibilité pour $\sigma(n)$. Il y a donc $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!$ permutations.

Parmi ces permutations, on peut s'amuser à compter combien sont des n-cycles. Les n-cycles s'écrivent $(1\ c_1\ \ldots\ c_{n-1})$, où les c_i sont des entiers compris entre 1 et $n-1$ deux à deux distincts. À chaque famille de c_i correspond un unique n-cycle et réciproquement. Il y a donc autant de n-cycles que de familles de c_i, c'est-à-dire $(n-1)!$

Énigmes utilisant les bijections

L'énigme 72 nécessite la décomposition en cycles à supports disjoints, l'énigme 74 nécessite l'utilisation de la signature et l'énigme 77 utilise directement la notion de bijection.

5 La récurrence

Présentation de la récurrence

La récurrence est un type de raisonnement très utile en mathématiques.

Imaginons des dominos placés les uns à la suite des autres, le tout de telle façon que si un domino tombe il fait tomber le suivant. Alors on voit directement que si l'on fait tomber le premier domino, tous les dominos vont tomber. On vient de faire un raisonnement par récurrence !

Plus formellement, on utilise un raisonnement par récurrence lorsqu'on veut démontrer qu'une propriété est vraie pour tous les entiers. Le raisonnement se fait en deux étapes. On démontre d'une part que si la propriété est vraie pour un certain entier, alors elle est vraie pour le suivant. Cette étape, appelée hérédité, correspond à la mise en place des dominos : si un domino tombe il fait tomber le suivant. D'autre part, on démontre que la propriété est vraie pour l'entier 1 : on fait tomber le premier domino. C'est l'initialisation. Elle est vraie pour l'entier 1 donc elle est vraie pour l'entier 2, donc pour 3, pour 4, etc. Tous les dominos tombent et la propriété est vraie pour tous les entiers.

Comme premier exemple, montrons par récurrence que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2. Par exemple avec $n = 1$, cette propriété nous dit que 1 est égal à 1^2 ce qui est évident. Avec $n = 2$, on a $1+3 = 2^2$, avec $n = 3$, $1+3+5 = 3^2$, etc. Pour démontrer cette propriété, on fixe un entier $n \geq 1$ quelconque et on suppose que $1+3+...+(2n-1) = n^2$. On veut montrer que $1+3+...+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$. C'est facile : $1 + 3 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. On a vu que la propriété était vraie au rang 1 (et même au rang 2 et 3), elle est donc vraie pour tous les entiers.

La récurrence "forte"

Avec le principe de récurrence exposé précédemment, on démontre une propriété $\mathcal{P}_n$ en montrant d'une part $\mathcal{P}_1$ et d'autre part que pour tout entier $n \geq 1$ si $\mathcal{P}_n$ est vraie alors $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

La récurrence dite "forte" consiste à "utiliser tous les dominos tombés pour faire tomber le suivant" : on montre $\mathcal{P}_1$ et on montre que pour tout entier n, si $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ sont vraies alors $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

En réalité, ce n'est pas plus général : on peut se ramener à une récurrence "faible". Il suffit en effet de considérer la propriété $\mathcal{P}'_n$: [$\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ vraies]. Prouver $\mathcal{P}_n$ avec une récurrence forte, c'est prouver $\mathcal{P}'_n$ avec une récurrence faible. La notion de récurrence forte n'a donc qu'un intérêt rédactionnel.

Exemple de récurrence

Pour n un entier strictement positif, on pose H_n la somme des inverses des entiers inférieurs ou égaux à n : $H_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$. Par exemple, $H_1 = 1$, $H_2 = \frac{3}{2}$, $H_3 = \frac{11}{6}$, etc. La suite $(H_n)_{n\geq 1}$ a une propriété mathématique intéressante (que l'on ne prouvera pas ici et qui n'est nécessaire que pour comprendre la motivation de la question traitée) : elle tend vers $+\infty$. De plus tous ses termes sont clairement rationnels. Cela amène naturellement à se poser la question : quels sont les termes entiers ? En fait, seul H_1 est entier.

On va en effet montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, H_n n'est pas un entier.

Soit $\mathcal{P}_n$ "$H_n = \frac{i_n}{p_n}$, avec i_n impair et p_n pair". Il suffit de montrer $\mathcal{P}_n$: si $H_n = \frac{i_n}{p_n}$, comme i_n n'est pas divisible par 2, H_n n'est pas entier.

Tout d'abord on montre $\mathcal{P}_2$: $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Supposons maintenant $\mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. Il faut distinguer deux cas :

— Si $n+1$ est impair, $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} = \frac{i_n(n+1)+p_n}{p_n(n+1)}$, le numérateur est impair et le dénominateur est pair, d'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

— Si $n+1$ est pair, $n+1 = 2m$ avec m un entier supérieur ou égal à 2. $H_{n+1} = \frac{1}{2}H_m + 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}H_m + \frac{k}{l}$, avec $l = 1\times 3\times ...\times n$, donc impair, et k un entier. $H_{n+1} = \frac{i_m l + 2kp_m}{2p_m l}$, d'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Finalement, par récurrence, on a bien le résultat annoncé.

Exemple de récurrence fallacieuse

Le raisonnement par récurrence cache certaines subtilités qu'il faut connaître. Voyons un exemple de faux raisonnement par récurrence :

Montrons par récurrence que n points dans le plan sont toujours alignés.

Initialisation : pour $n = 1$: un point du plan est toujours aligné. On peut même initialiser pour $n = 2$: deux points du plan sont toujours alignés.

Hérédité : soit n un entier quelconque, on suppose que n points du plan sont toujours alignés et on montre que $n + 1$ points du plan sont toujours alignés. Pour cela, on considère un groupe de n points parmi les $n + 1$ points du plan, par hypothèse de récurrence ces n points sont alignés. Maintenant, on considère un autre groupe de n points du plan qui sont également alignés. Les deux droites obtenues sont les mêmes par recoupement donc finalement les $n + 1$ points sont alignés. D'où le résultat... qui est absurde !

L'initialisation est valable et l'hérédité aussi. Seulement, l'hérédité n'est valable que pour $n \geq 3$ alors que l'initialisation ne l'est que pour $n = 1$ et $n = 2$. En d'autres termes, on a fait tomber les deux premiers dominos et on a montré qu'à partir du troisième domino, si un domino tombe il fait tomber le suivant. Cela n'est pas suffisant pour faire tomber tous les dominos car aucun domino ne fait tomber le troisième domino.

Énigmes utilisant la récurrence

Le raisonnement par récurrence est omniprésent en mathématiques. Quand un énoncé fait apparaître un n arbitraire, on peut toujours essayer de faire une récurrence sur n. Dans certains énoncés, n est fixé et donc "caché", par exemple s'il est question de "cent prisonniers", mais on peut prendre $n = 100$ et faire une récurrence sur n. Les énigmes 24, 30 et 44 sont des exemples classiques de récurrence. Par ailleurs, les énigmes 35, 66, 83 et 92 utilisent une récurrence.

6 La congruence

Notion de divisibilité

Avant de parler de congruence, il faut parler de divisibilité. Lorsqu'on effectue la division de 8 par 2 on trouve $\frac{8}{2} = 4$ qui est entier. On dit que ça tombe rond. Ainsi 2 *divise* 8. Par contre, si on effectue la division de 8 par 3 on trouve $\frac{8}{3} \simeq 2,67$. Le résultat n'est pas un entier, on dit que 3 ne divise pas 8. De même, 2 divise 26, 2 divise -144 mais 2 ne divise pas 77.

Formellement, on dit qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier k tel que $b = k \times a$. Pour revenir sur le premier exemple, 2 divise 8 car 8 peut s'écrire 4×2. Par contre 3 ne divise pas 8 car il n'existe aucun entier k tel que $8 = k \times 3$. À noter que tous les entiers considérés peuvent être négatifs : 2 divise -144 car il existe un entier $k = -72$ tel que $-144 = k \times 2$.

Enfin, notons que dire que a divise b, c'est la même chose que dire que b est un multiple de a. En effet, on dit que b est un multiple de a s'il existe un entier k tel que $b = k \times a$. Par exemple, 26 et -144 sont des multiples de 2.

Définition de la congruence

La congruence est un outil très important en arithmétique qui permet de simplifier un grand nombre de problèmes de divisibilité. On peut voir la congruence comme une égalité affaiblie. Les entiers 23 et 8 ne sont pas égaux mais ils sont liés par le fait que leur différence $23 - 8$ (ou $8 - 23$) est un multiple de 5. On dit que 23 et 8 sont *égaux modulo* 5, on dit aussi que 23 *est congru à* 8 *modulo* 5 ou que 8 *est congru à* 23 *modulo* 5. Par contre, 23 et 8 ne sont pas *égaux modulo* 6 car leur différence n'est pas un multiple de 6.

Plus généralement, si on considère un entier n ($n = 5$ dans l'exemple précédent), on dit que a *est congru à* b *modulo* n lorsqu'il existe un entier k tel que $a = b + kn$. Cela traduit le fait que la différence $a - b$ est

un multiple de n. On note alors $a \equiv b\,[n]$. Il est donc indifférent de dire que $a \equiv b\,[n]$, que $a - b$ est un multiple de n ou que n divise $a - b$.

Par exemple, $13 \equiv 1\,[2]$ car $13-1$ est un multiple de 2, ou pour revenir à la définition car $13 = 1 + 6 \times 2$. Ainsi on a $111 \equiv 1\,[2]$, $10 \equiv 1\,[3]$, $61 \equiv 12\,[7]$ mais $13 \not\equiv 2\,[9]$ et $24 \not\equiv 5\,[13]$.

Propriétés de la relation *être congru à*

Établissons maintenant une petite liste des propriétés de la relation *être congru à* que l'on va démontrer en revenant toujours à la définition formelle a est congru à b modulo n lorsqu'il existe un entier k tel que $a = b + kn$.

1. Pour tout a entier, $a \equiv a\,[n]$
2. Si $a \equiv b\,[n]$, $b \equiv a\,[n]$
3. Si $a \equiv b\,[n]$ et $b \equiv c\,[n]$, alors $a \equiv c\,[n]$
4. Si $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$, alors $a + c \equiv b + d\,[n]$. On dit que la congruence est compatible avec l'addition.
5. Si $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$, alors $ac \equiv bd\,[n]$. On dit que la congruence est compatible avec la multiplication.
6. Pour tout entier m, si $a \equiv b\,[n]$, alors $ma \equiv mb\,[n]$
7. Pour tout entier positif q, si $a \equiv b\,[n]$, alors $a^q \equiv b^q\,[n]$

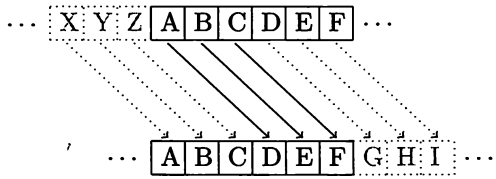
Preuve :

1. $a = a + 0 \times n$
2. Supposons $a \equiv b\,[n]$. Il existe un entier k tel que $a = b + kn$. $b = a + (-k)n$, donc $b \equiv a\,[n]$
3. Il existe k, k' deux entiers tels que $a = b + kn$ et $b = c + k'n$ d'où $a = c + (k + k')\,n$
4. On dispose de k, k' deux entiers tels que $a = b + kn$ et $c = d + k'n$ d'où $a + c = b + d + (k + k')\,n$
5. $ac = bd + (dk + bk' + kk'n)\,n$
6. Conséquence de la compatibilité avec la multiplication ($m \equiv m\,[n]$)
7. On peut le démontrer par récurrence sur $q \geq 0$. L'initialisation est claire (pour $q = 0$, $a^q = b^q = 1$), et l'hérédité découle de la compatibilité avec la multiplication : si $a^q \equiv b^q\,[n]$, comme $a \equiv b\,[n]$, $a^q a \equiv b^q b\,[n]$, soit $a^{q+1} \equiv b^{q+1}\,[n]$

Les propriétés 3 et 4 ne sont que des implications : les réciproques sont fausses. En effet, $3 \times 1 \equiv 3 \times 2\,[3]$ et $1^2 \equiv 2^2\,[3]$ mais $1 \not\equiv 2\,[3]$.

Application à la cryptographie

Les modulos trouvent de nombreuses applications dans la cryptographie. La plus simple est sans doute le chiffre de César. Le principe est de remplacer chaque lettre par la lettre trois pas plus loin dans l'alphabet. Ainsi, le A devient D, le B, E, etc. Pour boucler, le X devient A, le Y, B et le Z, C.



À l'aide des modulos, on peut expliciter l'algorithme de chiffrage/décodage. On commence par associer à chaque lettre son rang dans l'alphabet (entier compris entre 0 et 25).

— Chiffrage : à $i \in \{0, ..., 25\}$ on associe $i + 3$ modulo 26

— Déchiffrage : à $i \in \{0, ..., 25\}$ on associe $i - 3$ modulo 26

Application à un problème de divisibilité

Les nombres de Fermat sont les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ où n est un entier naturel. Ils doivent leur nom au mathématicien français Pierre de Fermat qui conjectura qu'ils étaient tous premiers. En effet, $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$ sont effectivement premiers. Les nombres de Fermat croissent très rapidement, la question de leur primalité est donc très délicate. Pourtant, Euler a démontré que 641 divise $2^{32} + 1$ donc que F_5 n'est pas premier, sans même calculer $2^{32} + 1$, simplement en utilisant les propriétés de la relation *être congru à*.

Pour cela, il écrit : $641 = 640 + 1 = 5 \times 2^7 + 1$ donc $5 \times 2^7 \equiv -1[641]$ (par définition), ainsi $5^4 \times 2^{28} \equiv 1[641]$ (propriété 7 avec $q = 4$).

Or $641 = 16 + 625 = 2^4 + 5^4$ donc $5^4 \equiv -2^4[641]$, ainsi, par la propriété 6, $5^4 \times 2^{28} \equiv -2^4 \times 2^{28}[641]$. D'après ce qui précède, $1 \equiv -2^4 \times 2^{28}[641]$ (propriété 3) donc en additionnant par 2^{32} de chaque côté (propriété 4), $2^{32} + 1 \equiv 0\,[641]$, c'est-à-dire 641 divise $2^{32} + 1$, le résultat annoncé.

Aujourd'hui, on pense (mais ce n'est pas démontré) que les seuls nombres de Fermat premiers sont F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 !

Application plus calculatoire

Les propriétés citées sur la congruence permettent de simplifier considérablement certains calculs. Par exemple, on peut trouver "sans effort" le dernier chiffre de l'écriture décimale de 343^{1000}. On remarque déjà que ce chiffre est congru à 343^{1000} modulo 10 (voir le rappel sur les bases). Ensuite, comme $343 \equiv 3\,[10]$, $343^{1000} \equiv 3^{1000}\,[10]$ (propriété 7). $3^2 \equiv -1\,[10]$, donc $3^{2\times 500} \equiv (-1)^{500}\,[10]$: $3^{1000} \equiv 1\,[10]$. Finalement, le dernier chiffre de 343^{1000} est 1.

Énigmes utilisant la congruence

L'énigme 55 utilise la notion de divisibilité, tandis que les énigmes 39, 73, 75 et 80 utilisent la congruence.

7 Les bases de numération

La base 10

Nous comptons en base 10. Le système de numération en base 10 est une façon de représenter les nombres avec les dix chiffres : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Par exemple, $346 = 3 \times 100 + 4 \times 10 + 6 = 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 6 \times 10^0$. D'une façon plus générale, si $c_0, \ldots, c_n$ sont des chiffres,

$$c_n c_{n-1} \ldots c_1 c_0 = \sum_{k=0}^{n} c_k \times 10^k$$

La base 2

La base 2 n'utilise que deux chiffres : 0 et 1. Pour le reste, son fonctionnement est le même que la base 10. Pour éviter les confusions, tous les nombres représentés en base 2 seront notés avec un indice $_2$. Par exemple, 10011_2 représente en base 2 le nombre :

$$\begin{aligned} 10011_2 &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 16 + 2 + 1 \\ &= 19 \end{aligned}$$

Lorsqu'on compte en base 2, on obtient la séquence suivante :

$$\begin{array}{rcccl} 0_2 & = & 0 \times 2^0 & = & 0 \\ 1_2 & = & 1 \times 2^0 & = & 1 \\ 10_2 & = & 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 & = & 2 \\ 11_2 & = & 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 & = & 3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1010_2 & = & 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 & = & 10 \end{array}$$

Comme en base 10, si $c_0, \ldots, c_n$ sont des chiffres (c'est-à-dire des 0 et des 1),

$$(c_n c_{n-1} \ldots c_1 c_0)_2 = \sum_{k=0}^{n} c_k \times 2^k$$

Numération en base 2

De nombreux problèmes de dénombrement peuvent être simplifiés par l'utilisation de la base 2. L'idée est souvent la même, numéroter les objets du problème en base 2. Voyons comment cette méthode peut conduire à une solution sur un exemple concret.

Considérons le problème suivant : on dispose de seize feuilles de papier et de quatre feutres de couleur jaune, rouge, bleu et vert. Le but est de faire un trait jaune sur huit feuilles, un trait rouge sur huit feuilles, un trait bleu sur huit feuilles et un trait vert sur huit feuilles, le tout en ayant au final toutes les configurations possibles, c'est-à-dire une feuille sans trait (non marquée), une feuille avec un seul trait jaune, ..., une feuille avec trois traits : jaune, bleu, vert, etc.

La solution la plus simple est de numéroter les seize feuilles en base 2. La première feuille sera la feuille numéro 0000_2, il y aura ensuite les feuilles 0001_2, 0010_2, 0011_2, 0100_2, etc. jusqu'à la feuille 1111_2. Maintenant il suffit de marquer en jaune toutes les feuilles dont le premier chiffre (en partant de la droite) est un 1 : les feuilles numéro 0001_2, 0011_2, 0101_2, 0111_2, 1001_2, 1011_2, 1101_2, 1111_2. De même, on marque en rouge toutes les feuilles dont le deuxième chiffre est un 1 : les feuilles numéro 0010_2, 0011_2, 0110_2, 0111_2, 1010_2, 1011_2, 1110_2, 1111_2. On marque en bleu les feuilles numéro : 0100_2, 0101_2, 0110_2, 0111_2, 1100_2, 1101_2, 1110_2, 1111_2. Enfin, on marque en vert les feuilles numéro : 1000_2, 1001_2, 1010_2, 1011_2, 1100_2, 1101_2, 1110_2, 1111_2. De cette façon, on constate qu'au final la feuille numéro $(c_3c_2c_1c_0)_2$ est marquée en jaune si et seulement si $c_0 = 1$, est marquée en rouge si et seulement si $c_1 = 1$, etc. On peut donc conclure que toutes les combinaisons possibles apparaissent, par exemple la feuille non marquée est la feuille 0000_2, la feuille marquée uniquement en jaune est la feuille numéro 0001_2 et la feuille marquée de toutes les couleurs est la feuille 1111_2. Le problème est résolu.

Énigmes utilisant la numération en base 2

Les énigmes 46, 57, 83 et 95 utilisent la numération en base 2.

8 Un peu de probabilités

Indépendance et probabilités conditionnelles

Deux événements sont indépendants lorsqu'ils n'ont aucune influence l'un sur l'autre. Par exemple, si l'on joue à pile ou face, le résultat du premier lancer n'a aucune influence sur le résultat du second lancer. De même avec un dé, le fait d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 5 n'influe pas sur la probabilité que le résultat soit pair (qui reste égale à $\frac{1}{2}$). Par contre, le fait d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 4 influe sur la probabilité que le résultat soit pair (qui passe à $\frac{2}{3}$).

Passons maintenant aux probabilités conditionnelles. La probabilité que l'événement A arrive sachant que l'événement B est arrivé se note $\mathbb{P}(A|B)$ et se lit "probabilité de A sachant B". C'est une probabilité conditionnelle. Par exemple, si on note A l'événement "il neige aujourd'hui" et B l'événement "il a neigé hier", il est clair que $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$: s'il a neigé la veille, il y a plus de chance qu'il neige encore aujourd'hui (car on a plus de chance d'être en hiver). En revanche, si l'on joue à pile ou face en notant A "le prochain lancer est pile" et B "le dernier lancer effectué est face", on a $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, on dit que les deux événements sont indépendants.

Par définition, pour deux événements A et B tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Cette formule est intuitive : on se restreint à l'ensemble B en appliquant la formule

$$\text{probabilité} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Notons que pour conditionner par rapport à l'événement B on doit avoir $\mathbb{P}(B) \neq 0$ car si $\mathbb{P}(B) = 0$ supposer que l'événement B est arrivé n'a aucun sens.

Résumons. Par défininition, deux événements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, ce qui équivaut à $\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

La formule de Bayes

La formule de Bayes permet de lier $\mathbb{P}(A|B)$ et $\mathbb{P}(B|A)$ pour deux événements A et B de probabilités non nulles.

$$\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B)$$

or

$$\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(B \text{ et } A) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)$$

d'où

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

C'est la formule de Bayes.

Voyons comment appliquer la formule de Bayes dans un cas concret. Une boîte contient deux pièces, une pièce normale avec un côté pile (P) et un côté face (F), et une pièce truquée avec deux côtés F. On choisit une des deux pièces au hasard et on la pose sur une table. La face visible est F. Quelle est la probabilité pour que l'autre face soit P ?

Très souvent, la réponse donnée est "une chance sur deux", en partant du principe que la pièce choisie peut être la pièce truquée ou bien la pièce normale, on ne sait pas, dans le premier cas la deuxième face est F, dans le deuxième cas c'est P. Bien entendu, ce raisonnement est fallacieux. Notons P l'événement "la face cachée de la pièce choisie est P" et F "la face visible de la pièce choisie est F". Appliquons la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(P|F) = \frac{\mathbb{P}(F|P) \times \mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(F)}$$

$\mathbb{P}(F|P) = 1$ car si la face cachée est P, la pièce choisie est la pièce ordinaire et la face visible est nécessairement F.

$\mathbb{P}(P) = \frac{1}{4}$ la face cachée de la pièce étant choisie au hasard parmi quatre faces possibles, trois F et une P.

$\mathbb{P}(F) = \frac{3}{4}$ la face cachée de la pièce étant choisie au hasard parmi quatre faces possibles, trois F et une P.

Finalement, la probabilité recherchée est $\mathbb{P}(P|F) = \frac{1}{3}$.

Cette démonstration n'est pas la meilleure façon de se convaincre du résultat. Le plus simple est de constater que lorsqu'on tire une pièce au hasard et qu'on la pose sur la table, il y a quatre cas équiprobables :

1. La pièce choisie est ordinaire, la face visible est P.
2. La pièce choisie est ordinaire, la face visible est F.

3. La pièce choisie est truquée, la face visible est sa première face F.
4. La pièce choisie est truquée, la face visible est sa deuxième face F.

Sachant que la face visible est F, on est dans le cas 2, 3 ou 4. La pièce a une face cachée P seulement dans le cas 2, donc une fois sur trois.

Il y a toutefois un point de rigueur qu'il faut éclaircir : pourquoi les trois cas 2, 3 et 4 restent-ils équiprobables ? C'est parce que l'on conditionne par rapport à l'événement "la face visible est F", qui est l'union des trois cas 1, 2 et 3. D'une façon plus générale, si l'on a une partition de l'univers Ω en n cas équiprobables $A_1, \ldots, A_n$ et $I \subset \{1, \ldots, n\}$, pour $k \in I$ les probabilités $\mathbb{P}\left(A_k | \bigcup_{i \in I} A_i\right)$ sont toutes égales (l'union correspond au "ou", l'intersection au "et").

$$\mathbb{P}\left(A_k | \bigcup_{i \in I} A_i\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A_k \bigcap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(A_k\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)}$$

Cela n'est pas si évident car si l'on conditionne par rapport à un événement "à cheval" sur les A_i, ce n'est plus forcément vrai.

Énigmes utilisant les probabilités

Dans ce livre, de très nombreuses énigmes sont liées aux probabilités. En particulier, les énigmes 25, 31, 32, 59, 85 et 86 utilisent les probabilités conditionnelles et la formule de Bayes. Par ailleurs, les énigmes 31, 32, 50 et 86 expliquent des faux raisonnements sur les probabilités qu'il faut savoir éviter.

Bibliographie

ÉMERY M., Quelques phénomènes curieux en probabilités et statistique, L'Ouvert, novembre 2001, n°104

ENGEL A., Solutions d'expert - Volume 1, Cassini, 2007

FRANCINOU S., GIANELLA H., NICOLAS S., Oraux X - ENS algèbre 2, Cassini, 2009

FRANCINOU S., GIANELLA H., NICOLAS S., Oraux X - ENS algèbre 3, Cassini, 2008

GARDNER M., My Best Mathematical and Logic Puzzles, Dover, 1994

GAUVRIT N., Vous avez dit hasard ? : Entre mathématiques et psychologie, Belin, 2009

KORDEMSKY B., The Moscow Puzzles : 359 Mathematical Recreations, Dover, 1992

PAGÈS G., 101 quizz qui banquent, Vuibert, 2009

WINKLER P., Mathematical Puzzles : A Connoisseur's Collection, A K Peters, 2003

`http://mathproblems.info/`

`http://www.qbyte.org/puzzles/`

`http://www.madore.org/~david/math/proba.html`

`http://www.samuelboudet.com/fr/enigmes`

`http://submoon.freeshell.org/fr/sphinx/index.html`

Table des matières

Préface iii

Avant-propos vii

I Énoncés 1

Niveau 1 3

1 Le forgeron feignant . . . 3
2 Les fourmis tamponneuses . . . 4
3 Le prix du gâteau . . . 5
4 La frite au ketchup . . . 6
5 L'explorateur qui tourne en rond . . . 7
6 L'œuf à la coque . . . 7
7 Les pilules . . . 8
8 L'étudiant pressé . . . 8
9 À contre-courant . . . 9
10 Vive les garçons . . . 9
11 Café au lait . . . 10
12 Lait au café . . . 10
13 Les gardes du paradis et de l'enfer . . . 11
14 Toto monte un escalier . . . 11
15 La mouche virevoltante . . . 12
16 Une heure d'avance . . . 12
17 Comment découper un cube . . . 13
18 Le premier à cent . . . 13
19 Attention peinture fraîche . . . 14
20 Le cocktail mondain . . . 14
21 Même heure, même endroit . . . 15
22 La pièce de trop . . . 15
23 Le paradoxe des anniversaires . . . 16
24 Les quinze serpents . . . 17
25 Un test de dépistage . . . 18
26 Une curieuse étude . . . 18

Niveau 2 **19**

27 Les lancers francs 19
28 Le numéro de la rue d'en face 20
29 Le tableau instable 20
30 Les femmes infidèles 21
31 Des probabilités étonnantes 21
32 Le paradoxe de Monty Hall 22
33 Les puzzles carrés 23
34 Le bon, la brute et le truand 23
35 La pénurie d'essence 24
36 La prédiction impossible 24
37 En trois pesées 25
38 Pile ou face dans le noir 25
39 Les prisonniers et les chapeaux 26
40 Fort Boyaux 27
41 Températures terrestres 27
42 L'hôtel de Hilbert 28
43 L'embarquement erratique 29
44 Les pirates mutins 29
45 La course des singes 30
46 Les nains voleurs 31
47 Huit triangles pour un carré 31
48 Comment paver sa salle de bain 32
49 Une pièce de plus 32
50 Une nouvelle variante de pile ou face 33
51 Le petit frère prend sa revanche 33
52 Les assiettes incassables 34
53 Le câble entourant la Terre 35
54 Les spaghettis 35
55 Les casiers de la piscine 36
56 Rencontres en soirée 36
57 Les rats et les bouteilles 37
58 La collection de cartes 37
59 Le paradoxe de Saint-Pétersbourg 38
60 La tablette de chocolat 39
61 Le morpion 39
62 La fourmi contre la voiture 40
63 L'écureuil et ses noisettes 41

Niveau 3 **43**

64 Le gâteau triangulaire 43
65 Un partage équitable 44
66 Le soldat solitaire 44
67 Le butin des treize pirates 45
68 Bons poids bonnes mesures 45
69 L'éléphant et les bananes 46
70 Le termite affamé 47
71 Les prisonniers et l'ampoule 48
72 Les prisonniers et les tiroirs 49
73 Les prisonniers et les sept chapeaux 50
74 Les prisonniers et les t-shirts 50
75 Die Hard 51
76 Les rats et les bouteilles (bis) 51
77 Où est le robot ? 52
78 Les ponts de Königsberg 52
79 Relier les arêtes 53
80 Un tour de magie 53
81 Comment paver sa salle de bain (bis) 54
82 Comment paver sa salle de bain (ter) 54
83 Le facteur fou 55
84 Attention, chien méchant 56
85 Les deux enveloppes première version 57
86 Les deux enveloppes deuxième version 58
87 L'écureuil et ses noisettes (bis) 58
88 Le singe savant 59
89 Un rectangle à côtés entiers 60
90 Trouver le bon câble 60
91 Intégration forcée 61
92 Rouge ou noir ? 61
93 Trouver le câble 62
94 Un bilan mitigé 62
95 L'échiquier à pièces 63
96 Les prisonniers et les chapeaux réels 63
97 Les prisonniers et les chapeaux (bis) 64
98 Une dernière énigme avec des prisonniers 65
99 Le commandant laxiste 65
100 Le solitaire 66

II Indications 67

III Solutions 81

IV Rappels 167

1 Le principe des tiroirs 169

2 Coefficients binomiaux 173

3 Relations d'équivalence 177

4 Les bijections 181

5 La récurrence 189

6 La congruence 193

7 Les bases de numération 197

8 Un peu de probabilités 199

Bibliographie 203

Cent énigmes et aucune astuce ! Cent pour cent logiques, cent pour cent mathématiques, les connaisseurs apprécieront.

Pour les plus jeunes qui sont encore au lycée... ou pour ceux qui l'ont quitté il y a un certain temps, les auteurs ont inclus des rappels mathématiques « musclés ». Qu'ils n'hésitent pas à s'appuyer dessus pour être mieux armés dans leur tentative de résolution. Pour celles et ceux qui maîtrisent bien leurs sujets, taupins, colleurs, professeurs ou petits génies de la finance, qu'ils plongent directement dans la difficulté, ils ne seront pas déçus.

Et si ça coince un peu plus que prévu, chaque énigme est assortie d'un indice qui peut éviter le recours trop rapide à la solution. Prenez le temps qu'il faut, ne gâchez pas votre plaisir !

9 782340 002128

www.editions-ellipses.fr